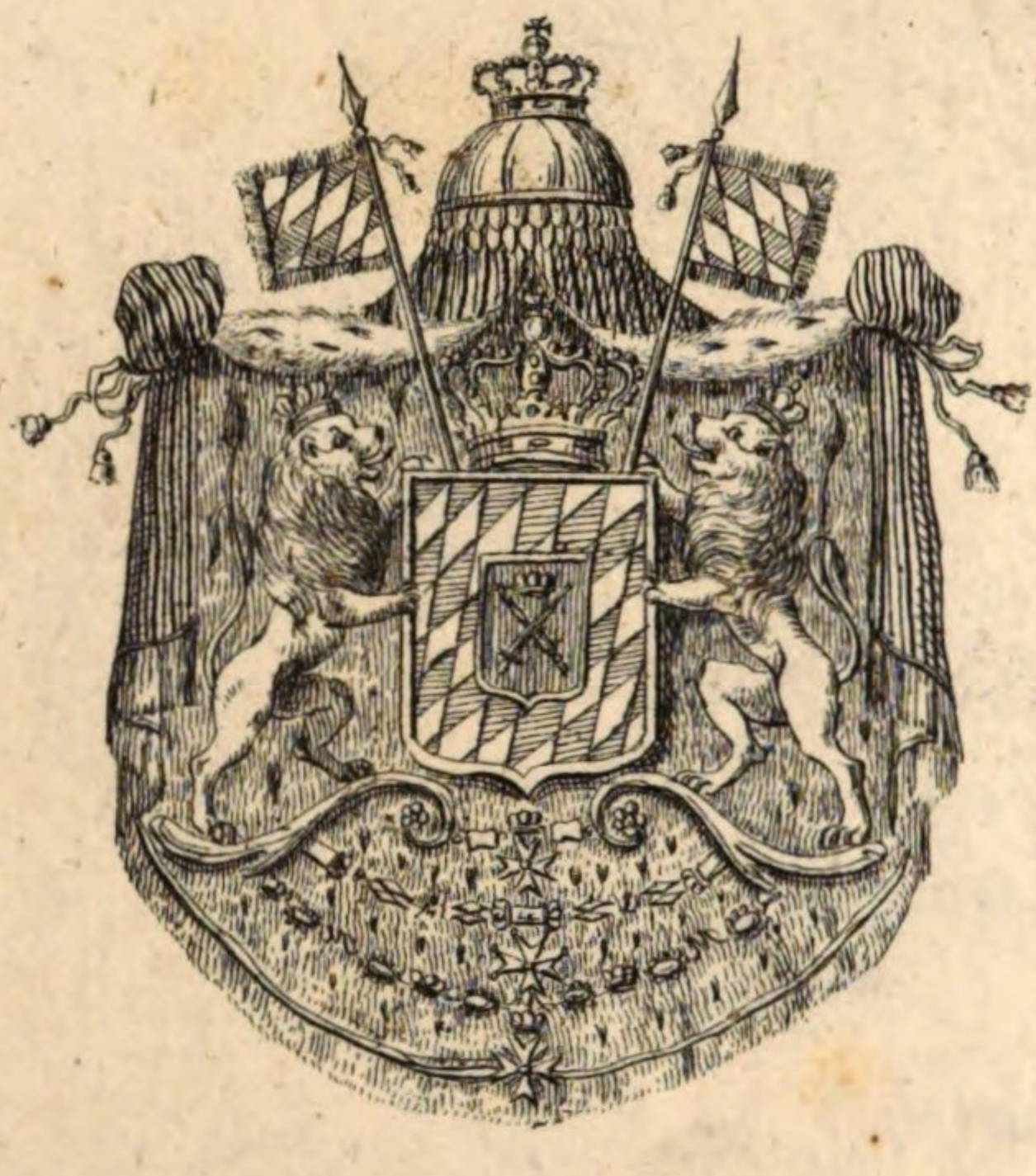
Math. P.
5'99 m



BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

R

Anfangsgründe
der
mathematischen Analysis
und der
höhern Geometrie,
vorzüglich
zum Gebrauche für den Unterricht
in Schulen.

Von
Anton Westner,
Professor der Mathematik im k. baierischen
Cadetten-Corps in München.

Mit drey Steindrucktafeln.

München, 1823.
In der Joseph Lindauerschen Buchhandlung.
C. Th. Fr. Sauer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Selten verstatten die Umstände, sich beym mathematischen Unterrichte eines einzigen Lehrbuches zu bedienen, welches sich über alle vorzutragenden Gegenstände verbreitet; denn es dürfte schwerlich der Fall seyn, daß ein solches Lehrbuch in allen seinen Theilen auch nur hinsichtlich des Umfanges dem beabsichtigten Zwecke des Unterrichtes vollständig entspräche.

Ist man aber einmal genöthiget, sich verschiedener Lehrbücher als Leitfaden zu bedienen, so ist die Auswahl derselben besonders für den Unterricht in der Analysis und in der höhern Geometrie schwierig; weil Schriften über den erstern Gegenstand gewöhnlich zur Erläuterung der vorgetragenen Sätze, oder auch, um sogleich deren Anwendung zu zeigen, Kenntnisse des letztern voraussetzen; so wie im Gegentheile die höhere Geometrie häufig mit Anwendung, nicht nur der gemeinen Analysis, sondern auch der Differential- und Integral-Rechnung abgehandelt wird.

Der vorzüglichste Zweck, welchen ich mir bey der Ausarbeitung dieser Anfangsgründe vorsetzte, war daher, denselben eine solche Einrichtung zu geben, daß man sie

überall nach beendigtem Unterrichte in der Ziffern- und Buchstabenrechnung, in den ersten Gründen der Algebra und der Lehre von den Logarithmen, in der Geometrie und in der Trigonometrie (wovon hier jedoch nur die Ebene, mit Einschluß der bekanntesten trigonometrischen Formeln *) vorausgesetzt wird,) benützen könne.

Aus diesem Grunde mußte ich den vollständigen Beweis des binomischen Lehrsatzes, und die Lehre von den höhern Gleichungen, welche Gegenstände streng genommen nicht zur Analysis, als „der Theorie der veränderlichen Größen, sofern sie durch willkürliche Zeichen construirt werden", **) gehören, in die erste Abtheilung aufnehmen.

Die Lehre von den Functionen ist nur so weit ausgeführt, als es zum Behufe der darauf folgenden Differential- und Integral-Rechnung erforderlich war. In der letztern war ich vorzüglich darauf bedacht, die Integrirung der so häufig vorkommenden binomischen Differentialen, und auch die der trinomischen so abzuhandeln, daß dadurch eine leichte Uebersicht der Fälle, in welchen die Integralen solcher Differentialen anders als durch Reihen angegeben werden können, und auch der dabey zu beobachtenden Verfahrungsart erlangt wird. Uebrigens beschränkt sich die Integral-Rechnung bloß auf die Integrirung von Differential-Formeln; die der Differential-Gleichun-

---

*) Diese Formeln, und auch die Längen der Kreisbögen beziehen sich in den vorliegenden Anfangsgründen, wo nicht das Gegentheil angezeigt ist, auf den Radius oder sin. tot. = 1.

**) E. G. Fischer's Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis. Berlin 1808. Seite 84.

gen wäre auch aus dem Grunde, daß sie eine weitere Ausführung der Differential-Rechnung erfordert hätte, dem Zwecke dieser Anfangsgründe nicht angemessen gewesen. Derjenige, welcher sich mit dieser Wissenschaft in einem größern Umfange bekannt machen will, muß darüber auch größere Werke, z. B. J. T. Mayer's vollständigen Lehrbegriff der höhern Analysis. Göttingen, 1818. studiren.

Viele Lehrbücher der höhern Geometrie beginnen sogleich, nachdem nothdürftige, und oft zu enge Erklärungen einiger Begriffe gegeben sind, mit der Erörterung der Eigenschaften besonderer krummen Linien, gewöhnlich der Kegelschnitte. Da mir aber dieses nicht der geeignete Weg zu seyn scheint, den Anfänger mit dem Wesen dieser Wissenschaft bekannt zu machen, so folgte ich jenen Schriftstellern, welche nach Vorausschickung der wichtigsten allgemeinen Lehren, die Anwendung derselben auf besondere krumme Linien zeigen. Dieses geschieht in Beziehung auf algebraische Linien an den Kegelschnitten und an den Linien der zweyten Ordnung überhaupt, in Beziehung auf transcendente Linien an der Cycloide.

Ich schloß hierauf mit den vorzüglichsten Lehren über krumme Flächen und über Linien von doppelter Krümmung; denn ich hielt weitere Anwendungen für weniger nothwendig, da man hinlänglich viele Beyspiele anderer krummen Linien, sowohl algebraischer von höhern Ordnungen, als auch transcendenter in Karsten's Lehrbegriffe der gesammten Mathematik, 2. Th. 2. Abth., in Klügel's mathematischem Wörterbuche ꝛc. findet. Ausführlich wird die höhere Geometrie in H. W. Brandes Lehr-

buche derselben abgehandelt, wovon bis jetzt der erste Theil (Leipzig, 1822.) erschienen ist.

Ich glaube nicht, daß man die Weglassung mehrerer Lehren und Sätze, besonders der Analysis, die mir entweder zu weitläufig, oder doch minder nothwendig, als die vorgetragenen schienen, fehlerhaft finden werde; vielmehr habe ich, um die Brauchbarkeit dieser Anfangsgründe allgemeiner zu machen, eine solche Anordnung getroffen, daß nach Weglassung der mit einem Sternchen bezeichneten Paragraphen *) das Uebrige ein Ganzes für sich ausmacht; denn oft können Beschränktheit der Zeit des Unterrichtes oder andere Umstände dem Vortrage des Ganzen hinderlich seyn.

Eben so sehr, als ich diese Anfangsgründe b r a u c h b a r zu machen suchte, war ich bemüht, die angeführten Gegenstände, besonders die Principien der Differential-Rechnung mit g r ü n d l i c h darzustellen.

Wegen Mangel an Deutlichkeit im Begriffe unendlich kleiner Größen werden, seit Lagrange's Théorie des fonctions analytiques erschien, die Grundbegriffe der Differential-Rechnung gewöhnlich aus der Theorie der analytischen Functionen abgeleitet. Allein man macht dieser Methode den Vorwurf, daß dadurch die u n m i t t e l b a r e Herleitung der Differentialen solcher Functionen, wofür keine analytischen Ausdrücke gegeben sind, sehr vielen Schwierigkeiten unterworfen werde; und doch flie-

---

*) Dazu können auch nöthigen Falles die Auflösungen der cubischen Gleichungen vermittelst der Cardan'schen Formel, und durch Hülfe der trigonometrischen Tafeln (§. 58.—64.) gerechnet werden, wenn man sich begnügen will, die Auflösung solcher Gleichungen nach §. 65. — 78. vorzunehmen.

ßen die größten Vortheile, welche die Differential-Rechnung durch ihre Anwendung auf Geometrie und Mechanik gewährt, eben aus dieser unmittelbaren Auffindung der Differentialen.

Eben derselbe Vorwurf trifft auch Pasquich's *) und L'Huilier's **) Methoden, so wie überhaupt alle Vorstellungsarten, durch welche man genöthiget wird, bloß die Differential-Quotienten in Betrachtung zu ziehen, ohne eigentlich mit den Differentialen selbst rechnen zu können.

Von Zeit zu Zeit erscheinende, neuere Versuche, welche auf das Fundament der Differential-Rechnung Bezug haben, dienen zum Beweise, daß weder Carnot's Ansicht der Differential-Rechnung, als einer Rechnung mit unvollkommenen Gleichungen ***), noch Joh. Schulz's Darstellung derselben als einer Rechnung mit absoluten Nullen, welche vermittelst einer Fiction als unendlichvielste Theile von Größen betrachtet werden ****), noch E. G. Fischer's Vorstellung der Differentialen als Endgrenzen veränderlicher Größen, welche symbolisch als verschwindende Endtheile vorgestellt sind *****), noch auch K. Chr. Langsdorf's Ansicht der Differential-Rechnung als einer blo-

---

*) Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinenlehre. Leipzig, 1790 — 98.

**) Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tub. 1795.

***) Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung. A. d. Franz. von J. K. F. Hauff. Frkf. a. M. 1800.

****) Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien. Königsberg, 1803.

*****) A. a. O. Seite 180.

ßen Formenbestimmung, um daraus den allgemeinen Grundsätzen der Arithmetik gemäß Quantitätsbestimmungen abzuleiten *), —

den erwünschten Grad von Deutlichkeit verschaffen.

In diesen Anfangsgründen beruht die Darstellung der Differential-Rechnung, (als einer Rechnung, deren Gegenstand die nach einer gewissen, bestimmt ausgesprochenen Hypothese zusammen gehörigen Veränderungen veränderlicher Größen, und Functionen derselben sind,) auf dem im §. 113. aufgestellten Begriffe der Grenze einer Größe.

Daß dieser Begriff, dessen Realität sogleich im folgenden §. dargethan ist, in der Mathematik überhaupt nothwendig sey, läßt sich in vielen Fällen zeigen. So ist z. B., wenn zwischen den veränderlichen Größen w und v die Gleichung: $w = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \chi (1 + \frac{1}{8} v + \frac{9}{256} v^2 + \ldots)$ Statt hat, für $v = 0$, $w = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Bezeichnet aber l die Länge eines Pendels, g die Beschleunigung der Schwere, v den Quersinus des halben Schwingungsbogens, und π die Ludolphische Zahl, so gibt w die Zeit einer Schwingung dieses Pendels an. In Rücksicht auf diese Beziehung zwischen v und w kann man der Größe w offenbar keinen bestimmten Werth beylegen, wenn man $v = 0$ setzt; denn dieß hieße angeben, wie viele Zeit ein Pendel, welches gar nicht schwingt, zu einer Schwingung brauche. Man kann also weder Null noch $\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$

---

*) Einleitung in das Studium der Elementar-Geometrie, Algebra ꝛc. Mannheim und Heidelb. 1814. Seite 123.

für w annehmen; aber es ist $\pi \sqrt{\frac{1}{2g}}$ eine Größe, welche von $\pi \sqrt{\frac{1}{2g}} \times (1 + \frac{1}{8} v + \frac{9}{2 5 6} v^2 + \ldots)$ um $\frac{1}{8} \pi v \sqrt{\frac{1}{2g}} \times (1 + \frac{9}{3 2} v + \ldots)$ unterschieden ist, und dieser Unterschied kann durch Abnahme von v kleiner als jede gegebene Größe, also beliebig klein werden; daher ist $\pi \sqrt{\frac{1}{2g}}$ in Absicht auf die Schwingungszeit nichts anderes, als die in §. 113. definirte Größe, nämlich die Grenze von w.

In der Erklärung (§. 112.) ist der Begriff unendlich kleiner Größen keineswegs versteckt enthalten; denn ungeachtet die Sätze:

„Eine Größe kann kleiner werden, als jede gegebene", und:

„Eine unendlich kleine Größe ist eine solche, welche kleiner ist, als jede angebliche",

ähnlich lauten, so ist doch die wesentliche Verschiedenheit derselben unverkennbar. Der erste fordert bloß die Möglichkeit eines Dinges, dessen Wirklichkeit vom zweyten voraus gesetzt wird. Man kann sich z. B. sehr wohl vorstellen, daß der Unterschied zwischen der Grundfläche einer Pyramide und zwischen einem dazu parallelen Durchschnitte, durch Verminderung des Abstandes dieser beyden Ebenen von einander, kleiner werden könne, als jede gegebene, noch so kleine Fläche; ohne deßhalb in die Nothwendigkeit versetzt zu seyn, diesen Durchschnitt in einer solchen Lage zu denken, in welcher der erwähnte Unterschied wirklich kleiner ist, als jede angebliche Fläche. Die Evidenz der Exhaustions-Methode, in welcher man sich nur des ersten Satzes bedienet, ist noch nie bezweifelt worden, wohl aber die Evidenz der Rechnung mit unendlich kleinen Größen.

Zur Erleichterung der unmittelbaren Auffindung der Differentialen bey Anwendung der Differential-Rechnung auf Geometrie und Mechanik dienen besonders die in §. 122. und §. 123. enthaltenen Sätze. Wie einfach diese unmittelbare Herleitung der Differentialen durch die beyden im erstern §. angegebenen Merkmale, welche das Differentiale einer Function bestimmen, in der Geometrie gemacht wird, ergibt sich in der zweyten Abtheilung aus der Ableitung der allgemeinen Formeln für Rectificationen ꝛc. In gleichem Grade vereinfachen diese Sätze auch die Anwendung der Differential-Rechnung auf Gegenstände der Mechanik.

Uebrigens habe ich, so oft es anging, sorgfältig vermieden, Voraussetzungen zu machen, welche Anfängern willkürlich zu seyn scheinen, z. B. die Annahme von Reihen von einer bestimmten Form für Größen, wofür noch kein analytischer Ausdruck bekannt ist. Wird gleich in solchen Fällen die Richtigkeit der gewählten Form dadurch bestätiget, daß sich die Coefficienten der Glieder, ohne einen Widerspruch herbey zu führen, bestimmen lassen; so bleibt doch unentschieden, ob die gewählte Form die einzig mögliche sey, oder ob es nicht noch andere, vielleicht bequemere oder einfachere Formen für den gesuchten Ausdruck der Größe gebe.

München, im April 1823.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

I. Hauptstück.

Vom binomischen Lehrsatze §. 1. Seite 1.

II. Hauptstück.

Von den höhern Gleichungen. S. 13.

I. Abschnitt.

Von der Reduction der Gleichungen. §. 14. S. 13.

II. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Gleichungen mit Einer unbekannten Größe. §. 36. S. 25.

III. Abschnitt.

Von den Verwandlungen der geordneten Gleichungen. §. 49. S. 33.

IV. Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit Einer unbekannten Größe. S. 38.

A. Von der Auflösung der quadratischen und der cubischen Gleichungen. §. 56. S. 38.

B. Von der Bestimmung der rationalen Wurzeln der höhern Gleichungen §. 65. S. 49.

C. Von der Bestimmung der irrationalen Wurzeln durch Näherung. §. 68. S. 56.

V. Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen. §. 79. S. 67.

VI. Abschnitt.

Anwendung auf die Zerlegung der zusammen gesetzten Größen in Factoren. §. 81. S. 68.

III. Hauptstück.

Von den Functionen. S. 75.

I. Abschnitt.

Von dem Begriffe und der Eintheilung der Functionen. §. 84. S. 75.

II. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Functionen. §. 92. S. 80.

III. Abschnitt.

Von der Auflösung der gebrochenen Functionen in Reihen und in Partial-Brüche. §. 98. S. 84.

IV. Abschnitt.

Von der Umkehrung der Reihen. §. 107. S. 94.

IV. Hauptstück.

Von der Differential-Rechnung. S. 101.

I. Abschnitt.

Von dem Begriffe des Differentiales, und von den Eigenschaften der Differentialen unbestimmter Functionen. §. 112. S. 101.

II. Abschnitt.

Von den Differentialen der Functionen, wenn die Art der Verbindung zwischen den veränderlichen und beständigen Größen derselben gegeben ist, oder von den Grundregeln der Differential-Rechnung. §. 130. S. 111.

III. Abschnitt.

Von den Differentialen der höhern Ordnungen. §. 140. S. 119.

IV. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der veränderten Werthe der Functionen mit Einer veränderlichen Größe. §. 146. S. 124.

V. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Berechnung der Logarithmen. §. 152. S. 130.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Functionen. §. 164. S. 138.

VII. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der Werthe gebrochener Functionen, wenn diese die Form $\frac{0}{0}$ erhalten. §. 178. S. 149.

V. Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung. S. 153.

I. Abschnitt.

Von dem Gegenstande und den Grundregeln der Integral-Rechnung. §. 181. S. 153.

II. Abschnitt.

Von der Integrirung der Differentialen, welche Potenzen mehrtheiliger Größen mit beständigen Exponenten enthalten. §. 194. S. 159.

III. Abschnitt.

Von der Integrirung einiger Differentialen, welche Exponential-Größen oder Logarithmen enthalten, und von der Integrirung höherer Differentialen. §. 214. S. 187.

Zweyte Abtheilung.

I. Hauptstück.

Von den Linien in einer Ebene überhaupt. S. 191.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung der Lage der Puncte in einer Ebene, und von den Gleichungen der Linien. §. 217. S. 191.

II. Abschnitt.

Von der Veränderung der Coordinaten und der Eintheilung der Linien. §. 232. S. 200.

III. Abschnitt.

Von den Tangenten, und den Differentialen der Coordinaten und Bögen. §. 244. S. 206.

IV. Abſchnitt.
Von den Wendungspuncten. §. 259. S. 215.
V. Abſchnitt.
Vom Krümmungskreiſe. §. 262. S. 218.
VI. Abſchnitt.
Von der Evolute. §. 270. S. 223.
VII. Abſchnitt.
Von der Rectification krummer Linien ꝛc. §. 275. S. 226.
VIII. Abſchnitt.
Von den Differentialen der trigonometriſchen Linien, und ihrem Gebrauche. §. 282. S. 232.
II. Hauptſtück.
Von den krummen Linien in einer Ebene insbeſondere. S. 251.
I. Abſchnitt.
Von den Kegelſchnitten überhaupt. §. 299. S. 251.
II. Abſchnitt.
Von den Kegelſchnitten insbeſondere. S. 264.
A. Von der Parabel. §. 321. S. 264.
B. Von der Ellipſe. §. 341. S. 274.
C. Von der Hyperbel. §. 381. S. 300.
D. Anmerkungen. §. 424. S. 324.
III. Abſchnitt.
Von den Linien der zweyten Ordnung überhaupt. §. 428. S. 326.
IV. Abſchnitt.
Von der Cycloide. §. 450. S. 348.
III. Hauptſtück.
Von den Flächen und Linien im Raume. S. 358.
I. Abſchnitt.
Von der Beſtimmung der Lage der Puncte im Raume. §. 465. S. 358.
II. Abſchnitt.
Von den Gleichungen der Flächen, und der Linien im Raume. §. 472. S. 361.
III. Abſchnitt.
Von den Berührungsebenen krummer Flächen, und von den Tangenten der Linien im Raume. §. 486. S. 370.
IV. Abſchnitt.
Von der Rectification der Linien im Raume. §. 498. S. 381.
V. Abſchnitt.
Von der Quadratur der krummen Flächen. §. 501. S. 382.
VI. Abſchnitt.
Von der Cubatur der Körper, welche von krummen Flächen begrenzt ſind. §. 508. S. 389.

Erste Abtheilung.

Analysis.

I. Hauptstück.

Vom binomischen Lehrsatze.

§. 1.

In der Elementar-Arithmetik lernt man bloß die Gesetze kennen, nach welchen das Quadrat und der Cubus einer zweytheiligen Größe, oder eines Binomiums gebildet wird; allein der binomische Lehrsatz gibt allgemein an, wie jede Potenz eines Binomiums durch seine beyden Theile und durch den Exponenten bestimmt wird.

§. 2.

Der erste Theil einer jeden zweytheiligen Größe kann mit a und der zweyte mit b bezeichnet werden; also ist $a + b$ die allgemeine Formel für jedes Binomium.

Durch Multiplication erhält man der Ordnung nach aus

$(a+b)^1 = a + b$;

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

u. s. w., wobey man sich vorstellen kann, daß das erste Glied einer jeden von diesen Potenzen mit b^0 und das letzte mit a^0 multiplicirt sey, da b^0 sowohl als $a^0 = 1$ ist.

§. 3.

Jede von den vorhergehenden Potenzen läßt nun wahrnehmen, daß sie nach folgenden Gesetzen gebildet sey:

1) Ist jedes Glied der Potenz ein Product aus einer Potenz des ersten, aus einer Potenz des zweyten Theiles, und aus einem Coefficienten, welcher nur durch den Exponenten der Potenz und durch die Stelle des Gliedes bestimmt wird.

2) Ist der Exponent der Potenz des ersten Theiles a im ersten Gliede dem Exponenten der Potenz des Binomiums gleich, und wird in jedem darauf folgenden Gliede der Ordnung nach um Eins kleiner.

3) Ist der Exponent der Potenz des zweyten Theiles b im ersten Gliede $= 0$, und nimmt in jedem darauf folgenden Gliede der Ordnung nach um Eins zu.

4) Der von den Theilen des Binomiums unabhängige Coefficient ist im ersten Gliede $= 1$, und in jedem andern Gliede der Quotient, welchen man erhält, wenn man das Product aus dem Coefficienten des vorhergehenden Gliedes mit dem Exponenten der Potenz des ersten Theiles in diesem Gliede durch die Zahl dividirt, welche die Stelle des nämlichen Gliedes in der Potenz angibt.

§. 4.

Wären die §. 3. angeführten Gesetze allgemein gültig, so wäre es leicht, jede Potenz eines Binomiums nach denselben zu bilden. So erhielte man z. B. für $(a+b)^7$,

das erste Glied $= 1\, a^7 b^0 = a^7$,

" zweyte " $= \frac{1.7}{1} a^6 b = 7 a^6 b$,

" dritte " $= \frac{7.6}{2} a^5 b^2 = 21 a^5 b^2$,

" vierte " $= \frac{21.5}{3} a^4 b^3 = 35 a^4 b^3$,

das fünfte Glied $= \frac{35 \cdot 4}{4} a^3 b^4 = 35 a^3 b^4$,

= sechste = $= \frac{35 \cdot 3}{5} a^2 b^5 = 21 a^2 b^5$,

= siebente = $= \frac{21 \cdot 2}{6} a b^6 = 7 a b^6$,

= achte = $= \frac{7 \cdot 1}{7} a^0 b^7 = b^7$,

= neunte = $= \frac{1 \cdot 0}{8} a^{-1} b^8 = 0$;

wodurch auch jedes folgende Glied $= 0$ wird, weil jedes von diesen Gliedern ein Product ist, welches den Coefficienten des vorhergehenden, also Null als Factor enthält (§. 3. nro. 4.). Demnach wäre

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

§ 5.

Ueberhaupt erhielte man, wenn man den Exponenten der Potenz allgemein mit m bezeichnet, der Potenz $(a+b)^m$

erstes Glied $= 1 a^m b^0 = a^m$,

zweytes = $= \frac{m}{1} a^{m-1} b$,

drittes = $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$,

viertes = $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$,

fünftes = $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$ ꝛc.

und für das an die nte Stelle gehörige Glied den Ausdruck

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-3)][m-(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1},$$

so daß also

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)..[m-(n-3)][m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-2)(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots$$

wäre.

§. 6.

Um nun erstlich zu erforschen, ob die §. 3. angeführten Gesetze, und mithin der nach denselben §. 5. gefundene Werth von $(a+b)^m$ für jeden durch eine ganze positive Zahl ausgedrückten Werth von m gültig seyen, nehme man an, er gelte für irgend einen solchen Werth von m, und leite daraus den Ausdruck für $(a+b)^{m+1}$ dadurch ab, daß man

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots$$

mit $a+b$ multiplicirt.

Durch die Multiplication mit a erhält man

$$(a+b)^m a = a^{m+1} + \frac{m}{1} a^m b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-1} b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)][m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{m-(n-2)} b^{n-1} + \ldots,$$

und die Multiplication mit b gibt

$$(a+b)^m b = a^m b + \frac{m}{1} a^{m-1} b^2 + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^3 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)][m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{m-(n-1)} b^n + \ldots,$$

bey welchem Producte das dem zuletzt geschriebenen unmittelbar vorangehende oder (n-1) te Glied

$$\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-4)][m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)} a^{m-(n-2)} b^{n-1}$$ ist.

Nun enthalten diejenigen Glieder des zweyten Partial-Productes $(a+b)^m b$ einerley Potenzen von a und b mit jenen Glie-

dern des ersten Partial-Productes $(a+b)^m a$, deren Stelle in diesem durch eine um 1 größere Zahl angegeben wird, als in jenem; um also die Summe der beyden Partial-Producte, welche $(a+b)^{m+1}$ gibt, in einer nach Potenzen von a und b geordneten Reihe zu erhalten, muß zum zweyten Gliede des ersten Productes das erste Glied des zweyten, zum dritten Gliede des ersten Productes das zweyte Glied des zweyten u. s. f. addirt werden.

Dadurch erhält man für die entwickelte $(m+1)$te Potenz von $a+b$, als ntes Glied die Summe des nten Gliedes vom Producte $(a+b)^m a$ und des $(n-1)$ten vom Producte $(a+b)^m b$, nämlich

$$\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)]\,[m-(n-2)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-1)}\,a^{m-(n-2)}\,b^{n-1}$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-4)]\,[m-(n-3)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-2)}\,a^{m-(n-2)}\,b^{n-1}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-2)}\,a^{m-(n-2)}\,b^{n-1}\times\left\{\frac{m-(n-2)}{n-1}+1\right\}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-2)}\,a^{m-(n-2)}\,b^{n-1}\times\frac{m-n+2+n-1}{n-1}$$

$$=\frac{(m+1)\,m(m-1)\ldots[m-(n-3)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-2)\ (n-1)}\,a^{m-(n-2)}\,b^{n-1}$$

$$=\frac{(m+1)\,m(m-1)\ldots[m+1-(n-2)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-1)}\,a^{m+1-(n-1)}\,b^{n-1}$$

§. 7.

Wenn man $m+1=p$ setzt, so ist also das nte Glied der Potenz $(a+b)^p$,

$$=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots[p-(n-2)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n-1)}\,a^{p-(n-1)}\,b^{n-1};$$

dieses wird daher eben so durch a, b und den Exponenten p bestimmt, wie das nte Glied

$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1}$

der Potenz $(a+b)^m$; nämlich wenn für $(a+b)^m$,

das erste Glied $= a^m$,

- zweyte - $= \frac{m}{1} a^{m-1} b$,

- dritte - $= \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2$,

- vierte - $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3$ u. s. f. ist,

so hat man auch, wenn $p = m + 1$ angenommen wird, für $(a+b)^p$,

das erste Glied $= a^p$,

- zweyte - $= \frac{p}{1} a^{p-1} b$,

- dritte - $= \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2$

- vierte - $= \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^3$ ꝛc.; d. h.

wenn die §. 3. angeführten Gesetze für irgend einen Werth des Exponenten m gelten, so sind sie auch für den um 1 größern Werth p desselben gültig.

Nun gelten sie aber, wenn man $m = 5$ setzt, (§. 2.), folglich sind sie auch gültig, wenn der Exponent $= 6$ ist; aus diesem folgt ihre Richtigkeit für $m = 7$ u. s. f. für jede nächst größere ganze Zahl; mithin ist für jede ganze positive Zahl m,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\ 2} a^{m-2} b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots$$

§. 8.

Um nun zu finden, was der Werth der Reihe

$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots$ sey, wenn m

keine ganze positive Zahl bezeichnet, setze man diesen noch unbekannten Werth $= P$, und multiplicire diese Reihe mit $a + b$; so muß im Producte $P(a + b)$ das erste Glied $= a^{m+1}$, und das nte $= \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\ldots[m+1-(n-2)]}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}\,a^{m+1-(n-1)}\,b^{n-1}$ (wie §. 6.) seyn, weil die Form des Productes nur durch die Form der Factoren $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \ldots$ und $a + b$, nicht aber durch besondere Werthe von m bestimmt wird. Diese Glieder, a^{m+1}, und

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)\ldots[m+1-(n-2)]}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}\,a^{m+1-(n-1)}\,b^{n-1}$$

werden daher aus dem ersten und nten Gliede der Reihe P unmittelbar gefunden, wenn man in denselben $m + 1$ statt m setzt.

Aus diesem folgt ferner, daß man aus dem ersten und nten Gliede von $P(a + b)$ das erste und nte Glied des Productes $P(a + b)(a + b)$ oder $P(a + b)^2$ erhalte, wenn man wieder $m + 1$ statt m setzt, und daß man folglich auch die genannten Glieder unmittelbar aus der Reihe P erhalte, wenn man im ersten und nten Gliede dieser Reihe $m + 2$ statt m setzt.

Man sieht ein, daß man durch Fortsetzung dieser Schlüsse a^{m+q} und

$$\frac{(m+q)(m+q-1)\ldots[m+q-(n-2)]}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}\,a^{m+q-(n-1)}\,b^{n-1}$$ als

erstes und ntes Glied für das Product $P(a + b)^q$ erhalten müsse, wenn nur q eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Es ist demnach für jede ganze positive Zahl q, und für jeden beliebigen Werth von m,

$$P(a+b)^q \text{ oder } \left(a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \ldots\right)\left(a^q + \frac{q}{1}a^{q-1}b + \ldots\right)$$

$$= a^{m+q} + \frac{(m+q)}{1}a^{m+q-1}b + \frac{(m+q)(m+q-1)}{1.\,2}a^{m+q-2}b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{(m+q)(m+q-1)\ldots[m+q-(n-2)]}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}\,a^{m+q-(n-1)}\,b^{n-1} + \ldots$$

§. 9.

Nimmt man an, m sey eine ganze negative Zahl, und bezeichnet man dieselbe mit $-r$, so wird (§. 8.)

$$P = a^{-r} - \frac{r}{1} a^{-(r+1)} b + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} a^{-(r+2)} b^2$$

$$- \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-(r+3)} b^3 + \ldots$$

$$\mp \frac{r(r+1)\ldots[r+(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} a^{-(r+n-1)} b^{n-1} \mp \ldots, \text{ und}$$

$$P(a+b)^q = a^{q-r} + \frac{(q-r)}{1} a^{q-(r+1)} b$$

$$+ \frac{(q-r)[q-(r+1)]}{1 \cdot 2} a^{q-(r+2)} b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{(q-r)[q-(r+1)]\ldots[q-(r+n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} a^{q-(r+n-1)} b^{n-1} + \ldots$$

Wenn man nun im zuletzt gefundenen Ausdrucke $q = r$ setzt, so wird $P(a+b)^r = a^{r-r} = a^0 = 1$; weil alle Glieder, welche auf das erste folgen, den Factor $q - r = r - r = 0$ enthalten, und folglich selbst Null werden.

Aus diesem folgt nun, daß $P = \frac{1}{(a+b)^r} = (a+b)^{-r}$, und daher

$$a^{-r} - \frac{r}{1} a^{-(r+1)} b + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} a^{-(r+2)} b^2 - \ldots$$

$$\mp \frac{r(r+1)\ldots[r+(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} a^{-(r+n-1)} b^{n-1} \mp \ldots = (a+b)^{-r} \text{ sey.}$$

Also werden die Potenzen zweytheiliger Größen auch dann den Gesetzen des §. 3. gemäß gebildet, wenn der Exponent eine ganze negative Zahl ist.

§. 10.

Bey der Multiplication der allgemeinen Ausdrücke

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \ldots \text{ und}$$

$$a^q + \frac{q}{1} a^{q-1} b + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} a^{q-2} b^2 + \ldots \text{ mit einander darf}$$

keine Rücksicht auf die Beschaffenheit der Zahlen m und q genommen werden; das Product muß daher die nämliche Form erhalten, es mögen m und q ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen bezeichnen.

Nun erhält aber, wenn q eine ganze positive Zahl ist, dieses Product die Form

$$a^{m+q} + \frac{(m+q)}{1} a^{m+q-1} b + \frac{(m+q)(m+q-1)}{1 \cdot 2} a^{m+q-2} b^2 + \ldots$$

(§. 8.); also hat das Product diese Form bey was immer für Werthen von m und q.

Diesem Satze zu Folge ist daher bey jedem beliebigen Werthe von m,

$$\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^2 = \left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)$$

$$= a^{2m} + \frac{2m}{1} a^{2m-1} b + \ldots$$

$$\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^3 = \left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^2 \left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)$$

$$= \left(a^{2m} + \frac{2m}{1} a^{2m-1} b + \ldots\right)\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)$$

$$= a^{3m} + \frac{3m}{1} a^{3m-1} b + \ldots$$

$$\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^4 = \left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^3 \left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)$$

$$= \left(a^{3m} + \frac{3m}{1} a^{3m-1} b + \ldots\right)\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)$$

$$= a^{4m} + \frac{4m}{1} a^{4m-1} b + \ldots$$

und mithin für jede ganze positive Zahl μ,

$$\left(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots\right)^{\mu} = a^{m\mu} + \frac{m\mu}{1} a^{m\mu-1} b + \frac{m\mu(m\mu-1)}{1 \cdot 2} a^{m\mu-2} b^2 + \ldots$$

Man setze, $m\mu$ gebe eine ganze positive oder negative Zahl k, so ist

$$a^{m\mu} + \frac{m\mu}{1} a^{m\mu-1} b + \frac{m\mu(m\mu-1)}{1 \cdot 2} a^{m\mu-2} b^2 + \ldots =$$

$a^k + \frac{k}{1} a^{k-1} b + \frac{k(k-1)}{1.2} a^{k-2} b^2 + .. = (a+b)^k$ (§. 7. u. 9.):

also $(a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots)^\mu = (a+b)^k$, und daher

$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots = (a+b)^{k:\mu}$, nämlich

$a^{k:\mu} + \frac{k}{\mu} a^{k:\mu-1} b + \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\mu}\left(\frac{k}{\mu} - 1\right) a^{k:\mu-2} b^2 + .. = (a+b)^{k:\mu}$.

Es wird demnach die Potenz einer zweytheiligen Größe auch dann den Gesetzen des §. 3. gemäß bestimmt, wenn der Exponent ein positiver oder negativer Bruch ist.

Mithin ist bey jedem Werthe von m,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots.$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots.(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots.$$

§. 11.

Weil n nur eine ganze positive Zahl bezeichnen kann, so kann $\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1}$ nur dann $= 0$ werden, wenn m auch eine ganze positive Zahl ist, und dieses geschieht bey $n = m+2$; weil der Factor $m - (n-2)$ für diesen Fall $= m - (m+2-2) = m - m = 0$ wird. Es wird aber nicht nur dieses $(m+2)$te Glied, sondern auch jedes auf dasselbe folgende Glied $= 0$, weil jedes derselben ebenfalls den Factor $m-(n-2)$ enthält.

Daher besteht die Potenz $(a+b)^m$ aus $m+1$ Gliedern, wenn m eine ganze positive Zahl ist; hingegen kann diese Potenz durch keine bestimmte Anzahl von Gliedern vollständig angegeben werden, wenn m eine gebrochene, oder negative, oder irrationale Zahl ist.

§. 12.

In der Reihe $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + ..$

(§. 10.) bezeichne man das n te Glied mit M, den Coefficienten desselben mit K, und das (n + 1) te Glied mit N, so ist $M = Ka^{m-(n-1)}b^{n-1}$ (§. 10.), und der Coefficient von N, $= \frac{K[m-(n-1)]}{n}$ (§. 3. nro. 4.); also $N = \frac{K[m-(n-1)]}{n} a^{m-n} b^{n}$

(§. 3. nro. 2. und 3.)

$$= \frac{[m-(n-1)]}{n} Ka^{m-(n-1)}b^{n-1} \times a^{-1}b = \frac{[m-(n-1)]}{n} . M . \frac{b}{a} .$$

Bezeichnet man nun ferner die Glieder der Reihe vom ersten angefangen der Ordnung nach mit A, B, C, D, ... so ist

$$A = a^{m},$$

$$B = \frac{m}{1} . A . \frac{b}{a},$$

$$C = \frac{(m-1)}{2} . B . \frac{b}{a},$$

$$D = \frac{(m-2)}{3} . C . \frac{b}{a}, \text{ ꝛc.; also}$$

$$(a+b)^{m} = a^{m} + \frac{m}{1} . A . \frac{b}{a} + \frac{m-1}{2} . B . \frac{b}{a} + \frac{m-2}{3} . C . \frac{b}{a} + \ldots$$

Wenn der Exponent ein Bruch, und $\frac{m}{n}$ seine Bezeichnung ist, so wird

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} . A . \frac{b}{a} + \frac{m-n}{2n} . B . \frac{b}{a} + \frac{m-2n}{3n} . C . \frac{b}{a} + \ldots$$

Dadurch ist die Reihe auf eine solche Form gebracht, daß jedes Glied derselben aus dem unmittelbar vorhergehenden berechnet werden kann.

Z. B. Für $\frac{1}{(x^2-y^3)^5} = (x^2 - y^3)^{-5}$ ist $a = x^2$, $b = -y^3$

und $m = -5$, also $\frac{b}{a} = -\frac{y^3}{x^2}$; folglich

$$a^{m} = (x^2)^{-5} = x^{-10} = \frac{1}{x^{10}} = A$$

$$\frac{m}{1} A . \frac{b}{a} = -5 . \frac{1}{x^{10}} . -\frac{y^3}{x^2} = +\frac{5y^3}{x^{12}} = B$$

$\frac{m-1}{2}.B.\frac{b}{a}=-\frac{6}{2}.\frac{5y^3}{x^{12}}.-\frac{y^3}{x^2}=+\frac{5.6y^6}{2x^{14}}=C$

$\frac{m-2}{3}.C.\frac{b}{a}=-\frac{7}{3}.\frac{5.6y^6}{2x^{14}}.-\frac{y^3}{x^2}=+\frac{5.6.7y^9}{2.3x^{16}}=D$

$\frac{m-3}{4}.D.\frac{b}{a}=-\frac{8}{4}.\frac{5.6.7y^9}{2.3x^{16}}.-\frac{y^3}{x^2}=+\frac{5.6.7.8y^{12}}{2.3.4x^{18}}=E$

u. ſ. w.; mithin

$$\frac{1}{(x^2-y^3)^5}=\frac{1}{x^{10}}+\frac{5y^3}{x^{12}}+\frac{5.6y^6}{2x^{14}}+\frac{5.6.7y^9}{2.3x^{16}}+\frac{5.6.7.8y^{12}}{2.3.4x^{18}}+\ldots$$

Um $\sqrt{c^2+x}=(c^2+x)^{\frac{1}{2}}$ zu entwickeln, muß $a=c^2$, $b=x$, $m=1$, $n=2$ geſetzt werden, und $\frac{b}{a}$ iſt $=\frac{x}{c^2}$; alſo

$$a^{\frac{m}{n}}=(c^2)^{\frac{1}{2}}=c=A$$

$\frac{m}{n}.A.\frac{b}{a}=\frac{1}{2}c.\frac{x}{c^2}=\frac{x}{2c}=B$

$\frac{m-n}{2n}.B.\frac{b}{a}=-\frac{1}{4}.\frac{x}{2c}.\frac{x}{c^2}=-\frac{x^2}{2.4c^3}=C$

$\frac{m-2n}{3n}.C.\frac{b}{a}=-\frac{3}{6}.-\frac{x^2}{2.4c^3}.\frac{x}{c^2}=+\frac{3x^3}{2.4.6c^5}=D$

$\frac{m-3n}{4n}.D.\frac{b}{a}=-\frac{5}{8}.\frac{3x^3}{2.4.6c^5}.\frac{x}{c^2}=-\frac{3.5x^4}{2.4.6.8c^7}=E$

$\frac{m-4n}{5n}.E.\frac{b}{a}=-\frac{7}{10}.-\frac{3.5x^4}{2.4.6.8c^7}.\frac{x}{c^2}=+\frac{3.5.7x^5}{2.4.6.8.10c^9}=F$

u. ſ. f.; daher iſt

$$\sqrt{c^2+x}=c+\frac{x}{2c}-\frac{x^2}{2.4c^3}+\frac{3x^3}{2.4.6c^5}-\frac{3.5x^4}{2.4.6.8c^7}+\frac{3.5.7x^5}{2.4.6.8.10c^9}\ldots.$$

§. 13.

Durch die Binomial-Formel (§. 10.) können auch die Potenzen von mehr- als zweytheiligen Größen gebildet werden. Um nämlich $(a+b+c+d+\ldots)^m$ zu erhalten, bilde man erſtlich

$(a+b)^m$, $(a+b)^{m-1}$, $(a+b)^{m-2}$ ꝛc.; dann läßt sich $(a+b+c)^m$ entwickeln, wenn man $a+b+c$ als ein Binomium betrachtet, dessen beyde Theile $a+b$, und c sind. Eben so entwickle man auch $(a+b+c)^{m-1}$, $(a+b+c)^{m-2}$ u. s. w.; so hat man die Potenzen, welche zur Bildung von $(a+b+c+d)^m$, $(a+b+c+d)^{m-1}$ u. s. f. dienen, wenn man $a+b+c+d$ für ein Binomium nimmt, dessen Theile $a+b+c$, und d sind. Auf die nämliche Art fahre man bey den folgenden Gliedern der vieltheiligen Größe fort.

II. Hauptstück.

Von den höhern Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von der Reduction der Gleichungen.

§. 14.

Es ist aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Art der arithmetischen Operationen, und die Ordnung, in welcher dieselben bey den Gleichungen vorgenommen werden müssen, um die unbekannten Größen durch bekannte ausgedrückt zu erhalten, von der Art der Verbindung zwischen den unbekannten Größen unter sich und mit den bekannten abhange.

Auch weiß man, daß eine Gleichung in Beziehung auf eine unbekannte Größe auf eine solche Form gebracht seyn müsse, daß

1) nur solche Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, und daß

2) die unbekannte Größe oder eine Potenz derselben weder als Nenner oder Divisor, noch als Theil eines Factors oder einer Wurzelgröße in irgend einem Gliede der Gleichung enthalten sey,

ehe man diejenigen Operationen vornehmen kann, wodurch der Werth dieser unbekannten Größe durch die übrigen in der Gleichung vorkommenden Größen ausgedrückt, erhalten wird.

§. 15.

Enthält die Gleichung Potenzen einer unbekannten Größe mit negativen Exponenten, so können dieselben durch andere mit positiven Exponenten bloß durch Anwendung des Satzes $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ausgedrückt werden.

§. 16.

Obgleich für den Fall, in welchem die unbekannte Größe in Nennern von Brüchen vorkömmt, nur diese Nenner nothwendig fortgeschafft werden müssen, so schafft man doch der leichtern Rechnung wegen gewöhnlich alle Nenner, und zwar dadurch weg, daß man beyde Seiten der Gleichung mit ihrem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt.

§. 17.

Kommen in einer Gleichung Wurzelgrößen vor, welche auf irgend eine Art durch eine unbekannte Größe bestimmt werden, (wozu auch Potenzen unbekannter oder mit unbekannten verbundener Größen gehören, welche gebrochene Zahlen als Exponenten haben, weil sich solche Potenzen von Wurzelgrößen nur in der Form des Ausdruckes unterscheiden) wo dann die Gleichung irrational heißt, so kann nach Wegschaffung der Nenner entweder

1) eine einzige Wurzelgröße, und zwar nur in Einem Gliede der Gleichung vorkommen; oder es kann
2) die nämliche Wurzelgröße öfters vorhanden seyn; oder die Gleichung kann
3) unbekannte Wurzelgrößen von der Beschaffenheit enthalten, daß entweder die Größen, deren Wurzeln angezeigt werden, oder die Wurzel-Exponenten verschieden sind.

Um eine solche Gleichung rational zu machen, d. h. die unbekannten Wurzelgrößen wegzuschaffen, bringe man im ersten Falle das irrationale Glied allein auf eine Seite der Gleichung, und erhebe alsdann beyde Seiten zur Potenz des Wurzel-Exponenten; z. B.

$$a + b\sqrt{x} = c$$
$$b\sqrt{x} = c - a$$
$$b^2 x = (c - a)^2$$

Im zweyten Falle bringe man die Glieder mit der Wurzelgröße auf die eine, die übrigen Glieder aber auf die andere Seite der Gleichung, zerlege die erstern dergestalt in Factoren, daß die Wurzelgröße ein Factor wird, und erhebe nach diesem beyde Seiten zur Potenz des Wurzel-Exponenten. Z. B.

$$a\sqrt[3]{x} + b\sqrt[3]{c} = c\sqrt[3]{x} + x$$
$$a\sqrt[3]{x} - c\sqrt[3]{x} = x - b\sqrt[3]{c}$$
$$(a - c)\sqrt[3]{x} = x - b\sqrt[3]{c}$$
$$(a - c)^3 x = (x - b\sqrt[3]{c})^3$$

Im dritten Falle wiederhole man das für den ersten oder zweyten Fall angegebene Verfahren bey jeder von den verschiedenen Wurzelgrößen besonders, jedoch so, daß man bey ungleichen Wurzel-Exponenten diejenige Wurzelgröße zuerst wegschafft, welche den größten Wurzel-Exponenten hat. Z. B.

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 = \sqrt{1-x}$$
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \sqrt{1-x}$$
$$1 + x = 1 + 3\sqrt{1-x} + 3(1-x) + (1-x)\sqrt{1-x}$$
$$4x - 3 = (4-x)\sqrt{1-x}$$
$$(4x-3)^2 = (4-x)^2 (1-x)$$

Bey gleichen Wurzel-Exponenten kann zuweilen der dritte Fall auf den zweyten zurückgeführt werden; z. B. in der Gleichung $a + \sqrt[3]{b x^2} = c - d\sqrt[3]{f x^2}$, wo $\sqrt[3]{b x^2} = \sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{x^2}$, und $\sqrt[3]{f x^2} = \sqrt[3]{f}.\sqrt[3]{x^2}$ ist; denn man erhält

$$a + \sqrt[3]{b\,x^2} = c - d\sqrt[3]{f} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

mithin $\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{x^2} + d\sqrt[3]{f} \cdot \sqrt[3]{x^2} = c - a$

$$(\sqrt[3]{b} + d\sqrt[3]{f})\sqrt[3]{x^2} = c - a$$

und $(\sqrt[3]{b} + d\sqrt[3]{f})^3\, x^2 = (c-a)^3$

§. 18.

Um eine Gleichung in Rücksicht auf eine unbekannte Größe auf die §. 14. angeführte Form zu bringen, schaffe man

1) diejenigen Potenzen der unbekannten Größe, welche negative Zahlen als Exponenten haben (§. 15.),
2) die Nenner der Brüche weg (§. 16.), mache
3) die Gleichung rational (§. 17.), und
4) verrichte man die Multiplication bey jenen Gliedern der Gleichung, in welchen die unbekannte Größe als Theil eines Factors vorkömmt.

Auch unterlasse man nicht, so oft es angeht, während der Verrichtung dieser Vorschriften solche Reductionen vorzunehmen, wodurch der Ausdruck der Gleichung vereinfacht wird.

Es sey z. B. die Gleichung

$$\frac{a^2}{b + c^2 x^{-1}} = x - \sqrt{a\,(b+x)}$$ gegeben, so ist

nach 1) $\dfrac{a^2 x}{b x + c^2} = x - \sqrt{a\,(b+x)}$,

nach 2) $a^2 x = (b x + c^2)\, x - (b x + c^2)\sqrt{a\,(b+x)}$,

nach 3) $(b x + c^2)\sqrt{a\,(b+x)} = (b x + c^2)\, x - a^2 x$

$$= b x^2 + (c^2 - a^2)\, x,$$

$$(b x + c^2)^2 \cdot a\,(b+x) = [b x^2 + (c^2 - a^2)\, x]^2,$$

und nach 4) $a b^2 x^3 + 2 a b c^2 x^2 + a c^4 x + a b^3 x^2 + 2 a b^2 c^2 x + a b c^4 = b^2 x^4 + 2 b\,(c^2 - a^2)\, x^3 + (c^2 - a^2)^2 x^2$.

§. 19.

Wenn eine Gleichung auf diese Form (§. 14.) gebracht ist, so heißt sie dann eine höhere, wenn eine Potenz der unbekannten

ten Größe vorkömmt, deren Exponent > 1 ist; und zwar heißt sie eine Gleichung vom zweyten, dritten, nten Grade, wenn der höchste Exponent der vorkommenden Potenzen der unbekannten Größe die Zahl 2 oder 3 oder überhaupt n ist.

Die Gleichungen vom zweyten Grade nennt man auch quadratische, die vom dritten Grade cubische, und die vom vierten biquadratische. So ist die Gleichung im Beyspiele des vorhergehenden §. eine Gleichung vom 4ten Grade, oder eine biquadratische Gleichung.

§. 20.

Eine Gleichung heißt rein, wenn die unbekannte Größe nur in Einer Potenz vorkömmt, nachdem sie auf die Form (§. 14.) gebracht ist; enthält sie aber Potenzen der unbekannten Größe mit verschiedenen Exponenten, so heißt dieselbe unrein oder gemischt.

§. 21.

Eine Gleichung heißt in Beziehung auf eine unbekannte Größe geordnet, wenn dieselbe

1) auf Null gebracht ist; wenn
2) jede Potenz der unbekannten Größe nur Ein Mal, dabey immer als Factor eines Gliedes vorkömmt, und diese Potenzen nach der Ordnung der Exponenten so auf einander folgen, daß die höchste Potenz im Anfange steht; wenn
3) die höchste Potenz positiv ist, und die Einheit als Coefficienten hat.

§. 22.

Um eine Gleichung, mit welcher man die im 1gten §. angegebene Reduction vorgenommen hat, zu ordnen, bringe man

1) alle Glieder auf die eine Seite der Gleichung so, daß die Potenzen der unbekannten Größe in der Ordnung, wie ihre Exponenten abnehmen, auf einander folgen.
2) Bringe man die Summe aller Glieder, in welchen die nämliche Potenz der unbekannten Größe vorkömmt, auf die Form eines Productes, von welchem diese Potenz ein Factor ist, und

3) dividire man mit dem bekannten Factor oder Coefficienten der höchsten Potenz der unbekannten Größe alle Glieder der Gleichung.

Um z. B. die Gleichung $a b^2 x^3 + 2 a b c^2 x^2 + a c^4 x + a b^3 x^2 + 2 a b^2 c^2 x + a b c^4 = b^2 x^4 + 2 b (c^2 - a^2) x^3 + (c^2 - a^2)^2 x^2$ (§. 18.) zu ordnen, hat man

nach 1) $b^2 x^4 + 2 b (c^2 - a^2) x^3 - a b^2 x^3 + (c^2 - a^2)^2 x^2 - 2 a b c^2 x^2 - a b^3 x^2 - a c^4 x - 2 a b^2 c^2 x - a b c^4 = o,$

nach 2) $b^2 x^4 + (2 b c^2 - 2 a^2 b - a b^2) x^3 + [(c^2 - a^2)^2 - 2 a b c^2 - a b^3] x^2 - (a c^4 + 2 a b^2 c^2) x - a b c^4 = o,$

oder $b^2 x^4 + b(2c^2 - 2a^2 - ab) x^3 + [(c^2 - a^2)^2 - ab(2c^2 + b^2)] x^2 - a c^2 (c^2 + 2 b^2) x - a b c^4 = o,$

nach 3) $x^4 + \frac{(2 c^2 - 2 a^2 - a b)}{b} x^3 + \frac{[(c^2 - a^2)^2 - a b (2 c^2 + b^2)]}{b^2} x^2 - \frac{a c^2 (c^2 + 2 b^2)}{b^2} x - \frac{a c^4}{b} = o.$

§. 23.

Wenn eine geordnete Gleichung außer jener Potenz der unbekannten Größe, von deren Exponenten dieselbe ihre Benennung erhält (§. 19.), auch noch alle niederern Potenzen und ein von der unbekannten Größe unabhängiges Glied, (wofür die Summe aller bekannten Glieder genommen wird, wenn deren mehr vorhanden sind) enthält; so heißt die Gleichung **vollständig**; im Gegentheile **unvollständig**.

§. 24.

Jede geordnete Gleichung vom mten Grade ist also unter dem Ausdrucke

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k = o$$

begriffen, wo bey unvollständigen Gleichungen die Coefficienten der fehlenden Glieder $= o$ sind.

§. 25.

Wenn zwey Gleichungen A und B gegeben sind, deren jede zwey unbekannte Größen x und y enthält, so läßt sich daraus eine andere bilden, aus welcher eine beliebige von den beyden unbekannten Größen z. B. y weggeschafft ist.

Man ordne die beyden Gleichungen nach §. 22, nur mit dem Unterschiede, daß man unterläßt, die §. 22. nro. 3. angegebene Division zu verrichten, und behandle dabey die nicht wegzuschaffende unbekannte Größe x wie eine bekannte Größe.

Man verschaffe denjenigen Gliedern, welche in jeder Gleichung die höchste Potenz von y enthalten, gleiche Coefficienten, wenn dieselben ungleich seyn sollten. Dieses wird am einfachsten dadurch bewerkstelliget, daß man die kleinste von denjenigen Zahlen sucht, welche durch jeden dieser Coefficienten theilbar sind; diese Zahl durch den einen Coefficienten sowohl, als auch durch den andern dividirt, und alle Glieder jeder Gleichung mit dem zugehörigen Quotienten multiplicirt.

Sind beyde Gleichungen von verschiedenen Graden, so multiplicire man zugleich alle Glieder der Gleichung vom niederern Grade mit derjenigen Potenz von y, welche diese Gleichung mit der andern auf einerley Grad bringt.

Man subtrahire dann beyde Gleichungen von einander; so erhält man eine dritte, welche wenigstens um Einen Grad niedriger seyn muß, als jede der gegebenen, wenn diese vom nämlichen Grade sind, oder als die höhere von den beyden gegebenen, wenn diese von verschiedenen Graden sind.

Im letztern Falle hat man nun an der gefundenen dritten Gleichung, und an derjenigen von den beyden gegebenen, welche vom niederern Grade ist, zwey Gleichungen, wovon keine bis zu demjenigen Grade steigt, von welchem die höhere der gegebenen ist.

Im erstern Falle aber wende man das für die beyden gegebenen Gleichungen vorgeschriebene Verfahren bey einer von diesen Gleichungen, und bey der gefundenen dritten an, so bekömmt man eine vierte, von einem ebenfalls wenigstens um Eins niederern Grade, als jede von den gegebenen ist, und man hat dann wieder an dieser

dritten und vierten, zwey Gleichungen, wovon keine bis zu demjenigen Grade steigt, von welchem die gegebenen sind.

Man wende nun bey diesen beyden Gleichungen das bisher für die gegebenen vorgeschriebene Verfahren an, und wiederhohle dasselbe wieder bey den dadurch gefundenen Gleichungen, so bekömmt man immer Gleichungen von niederern Graden.

Hat man eine Gleichung vom ersten Grade erhalten, so kann man daraus y suchen, und dessen Werth in jener von den übrigen Gleichungen, welche in Beziehung auf y vom niedrigsten Grade ist, substituiren. Dieses gibt dann eine Gleichung, aus welcher die unbekannte Größe y weggeschafft ist.

Beyspiel I.

Es sey aus den Gleichungen $\frac{y^4}{x} = a^3$ und $(y^2 - x^2)\, y = b^3$ die unbekannte Größe y wegzuschaffen.

Anmerkung. Vor jeder Gleichung ist durch die mit einer Klammer] abgeschlossenen Buchstaben die Operation angezeigt, wodurch diese Gleichung erhalten wurde, und auch ihre Bezeichnung.

Die beyden Gleichungen nach y geordnet, geben

A] $y^4 - a^3 x = 0$, und B] $y^3 - x^2 y - b^3 = 0$

1.) A, B. A] $y^4 - a^3 x = 0$

B × y] $\underline{-}\ y^4 \underline{+}\ x^2 y^2 \underline{+}\ b^3 y = 0$

A − B × y = C] $x^2 y^2 + b^3 y - a^3 x = 0$

2.) C, B. C × y] $x^2 y^3 + b^3 y^2 - a^3 x y = 0$

B × x^2] $\underline{-}\ x^2 y^3 \underline{+}\ x^4 y \underline{+}\ b^3 x^2 = 0$

C × y − B × x^2 = D] $b^3 y^2 + (x^4 - a^3 x)\, y + b^3 x^2 = 0$

3.) D, C. D × x^2] $b^3 x^2 y^2 + (x^6 - a^3 x^3)\, y + b^3 x^4 = 0$

C × b^3] $\underline{-}\ b^3 x^2 y^2 \underline{+}\ b^6 y \underline{+}\ a^3 b^3 x = 0$

D × x^2 - C × b^3 = E] $(x^6 - a^3 x^3 - b^6)\, y + (b^3 x^4 + a^3 b^3 x) = 0$

Aus E folgt $y = -\frac{b^3x^4 + a^3b^3x}{x^6 - a^3x^3 - b^6}$, und man erhält durch Substitution dieses Werthes von y in C,

F] $\frac{x^2(b^3x^4 + a^3b^3x)^2}{(x^6 - a^3x^3 - b^6)^2} - \frac{b^3(b^3x^4 + a^3b^3x)}{x^6 - a^3x^3 - b^6} - a^3x = 0$

Beyspiel II.

Aus den Gleichungen $2y^2 - x^2 = \frac{x^3}{2y}$, und $2y + x = -\frac{1}{3y^2}$, y wegzuschaffen. —

Beyde Gleichungen geordnet, geben

A] $4y^3 - 2x^2y - x^3 = 0$

B] $6y^3 + 3xy^2 + 1 = 0$

1) A, B. $A \times 3] \; 12y^3 - 6x^2y - 3x^3 = 0$,

$B \times 2] \; 12y^3 + 6xy^2 + 2 = 0$

$B \times 2 - A \times 3 = C] \; 6xy^2 + 6x^2y + (3x^3 + 2) = 0$

2) B, C. $B \times x] \; 6xy^3 + 3x^2y^2 + x = 0$

$C \times y] \; 6xy^3 + 6x^2y^2 + (3x^3 + 2)y = 0$

$C \times y - B \times x = D] \; 3x^2y^2 + (3x^3 + 2)y - x = 0$

3) C, D. $C \times x] \; 6x^2y^2 + 6x^3y + (3x^4 + 2x) = 0$

$D \times 2] \; 6x^2y^2 + (6x^3 + 4)y - 2x = 0$

$D \times 2 - C \times x = E] \; 4y - (3x^4 + 4x) = 0$

Daraus ist $y = \frac{3x^4 + 4x}{4}$, und man bekömmt durch Substitution in C die gesuchte Gleichung

F] $6x\frac{(3x^4 + 4x)^2}{16} + 6x^2\frac{(3x^4 + 4x)}{4} + 3x^2 + 2 = 0$

§. 26.

Aus drey Gleichungen A, B, C lassen sich zwey unbekannte Größen x, y wegschaffen; denn man kann aus A und B eine Gleichung D bilden, aus welcher y weggeschafft ist, und eine solche Gleichung E läßt sich auch aus B und C bilden (§. 25). Aus D und E kann sodann eine Gleichung F abgeleitet werden, aus welcher auch x weggeschafft ist.

Man kann auch aus A und C eine Gleichung G folgern, in welcher y fehlt, und dann aus G und D eine Gleichung H machen, aus welcher x weggeschafft ist.

Nun wird die Gleichung D durch die Bedingungen, welche A und B enthalten, und die Gleichung E durch die Bedingungen, welche B und C enthalten, bestimmt; also wird die Gleichung F durch die Bedingungen bestimmt, welche A, B und C enthalten.

Da ferner die Gleichung G durch die Bedingungen, welche A und C enthalten, bestimmt wird, so wird H ebenfalls durch die Bedingungen bestimmt, welche die Gleichungen A, B und C enthalten.

Das Nämliche würde bey der Gleichung J Statt haben, welche man durch Wegschaffung der Größe x aus E und G erhält.

§. 27.

Wenn man aus n gegebenen Gleichungen eine andere bilden kann, aus welcher von den unbekannten Größen, $n-1$ beliebige weggeschafft sind, so läßt sich auch aus $n+1$ Gleichungen A, B, C, D, ... J, K eine andere ableiten, welche von den vorkommenden unbekannten Größen, n beliebige nicht mehr enthält. Denn wenn man von diesen $n+1$ Gleichungen was immer für eine, z. B. K weglässt, so kann nach der Voraussetzung aus den übrigen n Gleichungen eine andere M gefolgert werden, in welcher $n-1$ beliebige unbekannte Größen nicht mehr vorhanden sind; läßt man dann von den $n+1$ Gleichungen eine andere, z. B. A weg, so hat man wieder n Gleichungen, welche eine neue N geben, in der die nämlichen $n-1$ unbekannten Größen fehlen. Aus M und N läßt sich ferner eine Gleichung V bilden, aus welcher noch eine unbekannte Größe weggeschafft ist. (§. 25.)

Nun können aus drey Gleichungen zwey unbekannte Größen weggeschafft werden (§. 26.); also ist die Voraussetzung richtig, wenn man $n = 3$ setzt; daher kann man dem Satze zu Folge aus vier Gleichungen drey unbekannte Größen wegschaffen; folglich ist die Voraussetzung für $n = 4$ richtig. Aus diesem folgt wieder ihre Richtigkeit für $n = 5$ u. s. f.; also lassen sich aus n Gleichungen $n-1$ unbekannte Größen wegschaffen, welche ganze Zahl auch n seyn mag.

§. 28.

Zwey Gleichungen wie M und N (§. 27.) lassen sich aus den $n+1$ gegebenen auch dadurch ableiten, daß man von den letztern andere, als K und A wegläßt, und aus diesen abgeleiteten Gleichungen P und Q läßt sich eine neue Gleichung VV eben so bilden, wie V aus M und N gefunden wird, so daß in VV eben dieselben n unbekannten Größen fehlen, welche in V nicht mehr vorhanden sind.

§. 29.

Wenn jede von den Gleichungen M, N, P, Q (§. 27. 28.) durch die Bedingungen bestimmt wird, welche die gegebenen $n+1$ Gleichungen mit Ausnahme der jedes Mal weggelassenen enthalten, so wird sowohl die Gleichung V als auch die Gleichung VV durch die Bedingungen bestimmt, welche die sämmtlichen $n+1$ gegebenen Gleichungen enthalten.

Setzt man $n=3$, so ist die für die Gleichungen M, N, P, Q gemachte Voraussetzung richtig (§. 26.); also sind die Gleichungen, welche aus 4 gegebenen so abgeleitet werden, daß in jeder die nämlichen drey unbekannten Größen fehlen, sämmtlich so beschaffen, daß jede davon durch die 4 gegebenen bestimmt wird; folglich ist die Voraussetzung für $n=4$ richtig. Daraus folgt eben so ihre Richtigkeit für $n=5$; aus diesem wieder für $n=6$ u. s. w. für jede nächst größere ganze Zahl; also ist sie allgemein richtig.

§. 30.

Gleichungen wie V und VV (§. 27. 28.), nämlich solche, von denen jede durch die Bedingungen bestimmt wird, welche in mehrern andern und zwar den nämlichen Gleichungen enthalten sind, können nicht so unterschieden seyn, daß aus ihnen eine neue Gleichung gefolgert werden könnte.

Also lassen sich aus drey Gleichungen nicht mehr als zwey (§. 26.) und überhaupt aus n Gleichungen nicht mehr als $n-1$ unbekannte Größen wegschaffen.

§. 31.

Wenn nicht in jeder von den gegebenen Gleichungen alle wegzuschaffenden Größen vorkommen, so sind dadurch schon Gleichungen gegeben, welche sonst nach §. 27. erst abzuleiten wären.

§. 32.

Aus n Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Größen läßt sich für jede von den letztern eine Gleichung finden, welche nur diese unbekannte Größe, und keine von den übrigen enthält; weil man n — 1 unbekannte Größen, und zwar, welche man will, weggeschaffen kann. (§. 27.)

Nun kann in einer Gleichung mit Einer unbekannten Größe offenbar dieser letztern kein willkürlicher Werth gegeben werden, ohne daß dadurch die Gleichung aufgehoben wird; also ist durch Eine Gleichung Eine unbekannte Größe bestimmt, (wodurch aber nicht behauptet wird, daß die Gleichung nur einen einzigen bestimmten Werth derselben zulasse); folglich sind durch n Gleichungen auch n unbekannte Größen bestimmt.

§. 33.

Wenn aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen folgen, als unbekannte Größen gesucht werden, so kann man, (da nur so viele unbekannte Größen weggeschafft werden können, als man Gleichungen hat, weniger Eine (§. 30.)) aus den gegebenen Gleichungen keine andere machen, die nur jede beliebige unbekannte Größe allein enthielte; also können für Eine oder mehrere unbekannte Größen willkürliche Werthe angenommen werden, ohne dadurch einen Widerspruch gegen die Bedingungen der Aufgabe herbeyzuführen; folglich ist eine solche Aufgabe unbestimmt.

§. 34.

Lassen die Bedingungen einer Aufgabe eben so viele Gleichungen folgern, als unbekannte Größen zu suchen sind, so ist jede der letztern (§. 32.), mithin auch die Aufgabe bestimmt.

§. 35.

Können aus den Bedingungen einer Aufgabe mehr Gleichungen abgeleitet werden, als unbekannte Größen vorhanden sind, so können alle unbekannten Größen weggeschafft, und dadurch Eine oder mehrere Gleichungen zwischen den gegebenen Größen gefunden werden. Eine solche Aufgabe setzt also bestimmte Verhältnisse zwischen

den gegebenen Größen voraus, und sie heißt mehr als bestimmt.

II. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Gleichungen mit Einer unbekannten Größe.

§. 36.

$x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$, $x - \gamma = 0$ ꝛc. sind die Ausdrücke geordneter Gleichungen vom ersten Grade (§. 24.) oder einfacher Gleichungen, wovon der erste nur dann $= 0$ wird, wenn $x = \alpha$, der zweyte, wenn $x = \beta$, der dritte, wenn $x = \gamma$ u. s. w. ist.

Multiplicirt man aber, ohne einen besondern Werth von x vorauszusetzen, (indem man also x als eine unbestimmte Größe, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ ꝛc. aber als bestimmte Größen betrachtet), die Größen $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ u. s. f. mit einander, so heißen dieselben in Beziehung auf das Product, einfache Factoren. Das Product zweyer einfachen Factoren heißt in Beziehung auf ein Product von mehr als zwey einfachen Factoren ein quadratischer Factor, das Product dreyer einfachen Factoren in Beziehung auf ein Product aus mehr als drey solchen Factoren ein cubischer Factor ꝛc., und man erhält

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta,$$

welches man auch so schreibt: $x^2 - \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} x + \alpha\beta$,

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \alpha\gamma\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} x - \alpha\beta\gamma,$$

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) =$$

$$x^4 - \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \alpha\gamma\\ \beta\gamma\\ \alpha\delta\\ \beta\delta\\ \gamma\delta\end{matrix}\right\} x^2 - \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ \alpha\beta\delta\\ \alpha\gamma\delta\\ \beta\gamma\delta\end{matrix}\right\} x + \alpha\beta\gamma\delta.$$

Das Product von zwey einfachen Factoren gibt also den Ausdruck einer geordneten quadratischen, das Product von drey Factoren den einer cubischen, und das Product von vier einfachen Factoren den einer biquadratischen Gleichung.

Ferner ist in jedem dieser Producte der Coefficient des zweyten Gliedes die Summe aller bestimmten Theile der einfachen Factoren, und das letzte Glied das Product aller dieser Theile.

§. 37.

Es sey $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - \ldots \pm J x \mp K$ das Product von m einfachen Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ &c., der Coefficient — A des zweyten Gliedes die Summe, und das letzte Glied $\mp K$ das Product aller bestimmten Theile $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ &c. derselben, so erhält man durch die Multiplication mit einem neuen einfachen Factor $x - \omega$,

$$x^{m+1} \left\{ \begin{matrix} - A \\ - \omega \end{matrix} \right. \quad x^m \left\{ \begin{matrix} + B \\ + A\omega \end{matrix} \right. \quad x^{m-1} \left\{ \begin{matrix} \ldots \pm J \\ \ldots \ldots \end{matrix} \right. \quad x^2 \left\{ \begin{matrix} \mp K \\ \mp J\omega \end{matrix} \right. \quad x \pm K\omega,$$

welches Product von $(m+1)$ einfachen Factoren ebenfalls der Ausdruck einer geordneten Gleichung, aber vom $(m+1)^{ten}$ Grade ist. Dabey ist wieder der Coefficient des zweyten Gliedes, nämlich $-A - \omega$ die Summe, und das letzte Glied $K\omega$ das Product der bestimmten Theile aller mit einander multiplicirten Factoren.

Wenn daher bey irgend einem Werthe von m der für das Product von m Factoren vorausgesetzte Satz richtig ist, so findet er auch Statt, wenn für m ein um Eins größerer Werth gesetzt wird.

Nun gilt er aber, wenn $m = 4$ gesetzt wird (§. 36.); folglich auch für $m = 5$; aus diesem für $m = 6$; aus diesem ferner für $m = 7$ &c.; mithin allgemein.

§. 38.

Man nehme an, der Ausdruck $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k$ einer gegebenen geordneten Gleichung vom m^{ten} Grade sey für jeden Werth von x dem Producte $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - \ldots \pm J x \mp K$ (§. 37.) von m

einfachen Factoren $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$ ꝛc. gleich; so ist auch für jeden Werth von x,

$$ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+ix+k=-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\ldots$$
$$\pm Jx\mp K,$$

mithin $\mp K=k$, wenn $x=o$ ist.

Es sind aber K und k von x unabhängige Größen, also ist auch für jeden andern Werth von x, $\mp K=k$, und daher

$$ax^{m-1}+bx^{m-2}+..+ix=-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-..\pm Jx;$$

folglich auch, wenn man beyde Seiten dieser Gleichung durch x dividirt,

$$ax^{m-2}+bx^{m-3}+...+i=-Ax^{m-2}+Bx^{m-3}-...\pm J$$

und daraus für $x=o$, $\pm J=i$, also auch für jeden andern Werth von x, $\pm J=i$, weil J und i ebenfalls von x unabhängige Größen sind.

Man sieht ein, daß, wenn man diese Art zu schließen fortsetzt, auch die Gleichheit der übrigen Coefficienten folge, welche in den beyden Ausdrücken zu einerley Potenz von x gehören.

Nun hat aber jeder von den beyden Ausdrücken außer dem ersten noch m Glieder, also hat man zwischen den Coefficienten, m Gleichungen:

$$-A=a$$
$$+B=b$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm J=i$$
$$\mp K=k$$

und da A, B, ... J, K bloß durch α, β, γ ꝛc. bestimmt werden, so hat man auch m Gleichungen zwischen den m Größen α, β, γ ꝛc. und den gegebenen Coefficienten a, b ꝛc., wodurch also die erstern vermittelst der letztern bestimmt sind. (§. 32.)

Es ist daher immer ein Product von m einfachen Factoren möglich, welches dem Ausdrucke einer gegebenen Gleichung vom m^{ten} Grade für jeden Werth der unbekannten Größe gleich ist.

Man kann also den Ausdruck jeder geordneten Gleichung als ein solches Product betrachten, und was von einem solchen Producte erwiesen wird, gilt auch von dem Ausdrucke der Gleichung.

§. 39.

Ein Product einfacher Factoren wird immer $= o$, wenn x so groß angenommen wird, als das Gegentheil von einem bestimmten Theile eines einfachen Factors; nämlich $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$ wird $= o$, wenn entweder $x = +\alpha$, oder $x = +\beta$, oder $x = +\gamma$ ꝛc. gesetzt wird, weil in jedem Falle einer von den einfachen Factoren $= o$ wird; das Product kann aber nicht $= o$ werden, wenn für x ein solcher Werth gesetzt wird, welcher nicht das Gegentheil vom bestimmten Theile des einen oder des andern einfachen Factors ist.

Also gibt es für die unbekannte Größe einer geordneten Gleichung vom m^{ten} Grade m, aber nicht mehrere Werthe, welche den Ausdruck der Gleichung auf Null bringen. Solche Werthe heißen Wurzeln der Gleichung, und eine Gleichung auflösen heißt die Wurzeln derselben finden, nämlich angeben, wie dieselben durch die Coefficienten der Glieder bestimmt werden.

§. 40.

Weil jede Wurzel einer Gleichung immer das Gegentheil vom bestimmten Theile eines derjenigen einfachen Factoren ist, deren Product den Ausdruck der Gleichung gibt (§. 39.); so ist immer ein einfacher Factor bekannt, sobald man eine Wurzel der Gleichung kennt.

Weil ferner ein Product aus mehrern Factoren durch einen derselben dividirt, das Product der übrigen als Quotienten gibt, so folgt auch, daß der Ausdruck einer Gleichung durch einen aus einer bekannten Wurzel abgeleiteten einfachen Factor dividirt, den Ausdruck einer um Einen Grad niedrigern Gleichung gebe, deren Wurzeln die übrigen Wurzeln der erstern Gleichung sind.

Eben so folgt, daß der Ausdruck einer gegebenen Gleichung eine um 2, 3 ꝛc. Grade niederere Gleichung gebe, wenn man denselben durch einen quadratischen, cubischen ꝛc. aus 2, 3 ꝛc. bekannten Wurzeln gebildeten Factor dividirt, und daß die letztere Gleichung keine andern, als die noch übrigen Wurzeln der gegebenen enthalten könne.

§. 41.

Nach §. 37. ist im Producte einfacher Factoren der Coefficient des zweyten Gliedes der Summe, und das letzte Glied dem Producte aller bestimmten Theile dieser Factoren gleich; also ist auch in jeder geordneten Gleichung der Coefficient des zweyten Gliedes so groß als die Summe aller Wurzeln, hat aber das entgegengesetzte Zeichen; und das letzte Glied ist dem Producte aller Wurzeln gleich, mit dem entgegengesetzten Zeichen, wenn der Grad der Gleichung durch eine ungerade Zahl, mit dem zugehörigen Zeichen, wenn derselbe durch eine gerade Zahl angegeben wird. (§. 38. 39.)

§. 42.

Wenn das zweyte Glied einer Gleichung fehlt, so hat dieselbe entgegengesetzte Wurzeln, so daß die Summe der positiven der Summe der negativen gleich ist. (§. 41.)

Fehlt aber das letzte Glied, so ist das Product aller Wurzeln $= 0$ (§. 41.); also muß auch eine Wurzel $= 0$ seyn.

Fehlt außer dem letzten auch noch das vorletzte Glied, so sind 2 Wurzeln $= 0$; denn dividirt man den Ausdruck der Gleichung durch den einfachen Factor $x - 0 = x$, so wird das vorletzte Glied im Quotienten das letzte; also ist nach der Voraussetzung das letzte Glied derjenigen Gleichung, welche die übrigen Wurzeln der gegebenen enthält (§. 40.), wieder $= 0$, mithin noch eine Wurzel der gegebenen.

§. 43.

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung bis auf Eine bekannt sind, so erhält man auch diese, wenn man die Summe der bekannten Wurzeln vom Coefficienten des zweyten Gliedes, letztern mit entgegengesetztem Zeichen genommen, abzieht. (§. 41.)

§. 44.

Wenn im Producte einfacher Factoren der bestimmte Theil eines einzelnen Factors eine unmögliche Größe ist, die bestimmten Theile aller übrigen einfachen Factoren aber mögliche Größen sind, so können die Coefficienten der Glieder des Products durchgehends

keine möglichen Größen seyn; wenn aber zwey einfache Factoren unmögliche Wurzelgrößen von der Form $x + \alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $x + \alpha - \beta\sqrt{-1}$ sind, so ist ihr Product $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, nämlich der aus ihnen gebildete quadratische Factor möglich.

Multiplicirt man einen solchen quadratischen Factor mit möglichen einfachen Factoren, oder auch mit andern quadratischen Factoren von eben derselben Art, so müssen also die Coefficienten der Glieder des Productes sämmtlich mögliche Größen seyn.

Also kann eine Gleichung, in welcher die Coefficienten aller Glieder mögliche Größen sind, unmögliche Wurzeln enthalten; allein diese müssen immer in gerader Zahl vorhanden seyn, und es hat folglich eine Gleichung, deren Grad durch eine ungerade Zahl angegeben wird, wenigstens Eine mögliche Wurzel, wo hingegen alle Wurzeln einer Gleichung unmöglich seyn können, wenn ihr Grad durch eine gerade Zahl ausgedrückt wird.

§. 45.

Im Ausdrucke einer geordneten Gleichung, $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k$ (§. 24.) seyen die Coefficienten a, b, ... i, k ganze Zahlen. Setzt man statt x einen Bruch $\frac{p}{q}$, so erhält der Ausdruck den Werth

$$\frac{p^m}{q^m} + \frac{a p^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{b p^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots + \frac{i p}{q} + k =$$

$$(p^m + a p^{m-1} q + b p^{m-2} q^2 + \ldots + i p q^{m-1} + k q^m) : q^m$$

$$= [p^m + (a p^{m-1} + b p^{m-2} q + \ldots + i p q^{m-2} + k q^{m-1}) q] : q^m.$$

Soll dieser Ausdruck $= o$ werden, so muß

$$p^m = -(a p^{m-1} + b p^{m-2} q + \ldots + i p q^{m-2} + k q^{m-1}) q,$$

mithin $\frac{p^m}{q} = -(a p^{m-1} + b p^{m-2} q + \ldots + i p q^{m-2} + k q^{m-1})$

seyn. Es sind aber vermöge der Voraussetzung a, b, ... i, k ganze Zahlen, und auch m ist eine ganze positive Zahl (§. 14.); folglich ist auch

$$a p^{m-1} + b p^{m-2} q + \ldots + i p q^{m-2} + k q^{m-1}$$

eine ganze Zahl; welches unmöglich ist, wenn p durch q nicht theilbar, also der Bruch ein solcher ist, welcher auf keine ganze Zahl gebracht werden kann.

Keine Wurzel einer Gleichung, in deren geordnetem Ausdrucke die Coefficienten der Glieder sämmtlich ganze Zahlen sind, ist also ein Bruch; die Wurzeln einer solchen Gleichung sind daher entweder ganze, oder irrationale Zahlen, oder unmögliche Größen.

§. 46.

Wenn die Coefficienten a, b, c, ... i, k der Glieder einer geordneten Gleichung

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k = 0,$$

sie mag vollständig oder unvollständig seyn (§. 23.), sämmtlich positive Zahlen bezeichnen, und die Glieder selbst durchgehends durch das Zeichen + verbunden sind, so bleiben bey positiven Werthen von x alle Glieder positive, also übereinstimmige Größen, deren Summe daher nicht Null werden kann; also hat eine solche Gleichung keine positive Wurzel.

Es sey m gerade, die Coefficienten derjenigen Glieder, in welchen Potenzen von x mit geraden Exponenten vorkommen, und das letzte Glied positiv, die Coefficienten der übrigen Glieder aber negativ, so werden bey negativen Werthen von x alle Glieder positiv, also ihre Summe nicht Null; auch kann diese Summe bey negativen Werthen von x nicht Null werden, wenn m ungerade ist, alle Glieder mit geraden Potenzen von x negative, die übrigen aber positive Coefficienten haben, und auch das letzte Glied negativ ist; denn es werden dadurch alle Glieder negativ. Gleichungen von der angeführten Beschaffenheit haben also keine negativen Wurzeln.

Wenn eine Gleichung vollständig ist, und die Zeichen der Glieder der Ordnung nach mit + und — abwechseln, so ist bey geraden Werthen von m das letzte als das $(m+1)$te Glied positiv, bey ungeraden negativ, und auch die übrigen Glieder sind in jedem Falle der so eben gemachten Voraussetzung gemäß positiv oder negativ; also hat eine solche Gleichung keine negative Wurzel.

Man kann diese Sätze auch so ausdrücken: Wenn eine Gleichung lauter positive Glieder hat, so hat sie keine positive Wurzel, und wenn die Glieder mit geraden Potenzen der unbekannten Größe, das letzte dazu gerechnet, einerley Zeichen, die übrigen aber das entgegengesetzte Zeichen haben, so hat die Gleichung keine negative Wurzel.

§. 47.

Nimmt man für die unbekannte Größe x, beliebige bestimmte Werthe, so erhält durch jeden derselben der Ausdruck der Gleichung ebenfalls einen bestimmten Werth.

Sind p und q solche Zahlen, daß dieser Ausdruck durch $x = p$ positiv, durch $x = q$ aber negativ wird, so muß man durch dergestalt mit den Werthen von x vorgenommene Veränderungen, wodurch dieselben vom Werthe p stetig mehr und so unterschieden werden, daß sie dadurch dem Werthe q immer näher kommen, wenigstens auf Einen Werth von x kommen, durch welchen der Ausdruck der Gleichung auf Null gebracht wird; nämlich zwischen p und q muß wenigstens Eine mögliche Wurzel der Gleichung liegen.

§. 48.

Der Ausdruck der Gleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + ix + k$$

läßt sich auch so darstellen:

$$x^m \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{i}{x^{m-1}} + \frac{k}{x^m}\right),$$

und jeder von den Brüchen $\frac{a}{x}, \frac{b}{x^2}, \ldots$ kann offenbar beliebig klein gemacht werden, da man x beliebig groß annehmen kann; also kann man immer x so groß annehmen, daß

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{i}{x^{m-1}} + \frac{k}{x^m} < 1,$$

folglich $1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{i}{x^{m-1}} + \frac{k}{x^m}$ positiv wird, x und die Coefficienten a, b, ... i, k mögen positive oder negative Werthe haben. Wenn m eine gerade Zahl ist, so wird

x^m positiv, es mag x positiv oder negativ seyn; mithin gibt es immer einen positiven und auch einen negativen Werth von x, wodurch $x^m \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \ldots + \frac{i}{x^{m-1}} + \frac{k}{x^m}\right)$ nämlich $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k$ positiv wird. Setzt man $x = o$, so wird der Werth des Ausdruckes der Gleichung $= k$, also negativ, wenn k negativ ist; daher hat eine Gleichung, deren Grad durch eine gerade Zahl angegeben wird, immer wenigstens zwey mögliche Wurzeln, wenn ihr letztes Glied negativ ist (§. 47.), und die eine derselben ist positiv, die andere negativ.

III. Abschnitt.

Von den Verwandlungen der geordneten Gleichungen.

---

§. 49.

Substituirt man in der Gleichung $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} \ldots + i x + k = o$, $\frac{y}{p}$ statt x, so wird dieselbe in $\frac{y^m}{p^m} + \frac{a y^{m-1}}{p^{m-1}} + \frac{b y^{m-2}}{p^{m-2}} + \ldots + \frac{i y}{p} + k = o$, oder durch Multiplication mit p^m, in $y^m + a p y^{m-1} + b p^2 y^{m-2} + \ldots + i p^{m-1} y + k p^m = o$ verwandelt. Sind nun α, β, γ . . . die Wurzeln der erstern, so wird der Ausdruck der letztern immer auf Null gebracht, wenn man y solche Werthe gibt, daß entweder $\frac{y}{p} = \alpha$, oder $\frac{y}{p} = \beta$, oder $\frac{y}{p} = \gamma$, . . . wird, d. h. wenn man $y = p\alpha$, oder $y = p\beta$, oder $y = p\gamma$ . . . setzt.

Jede Wurzel der letztern ist also das pfache von jeder Wurzel der erstern; mithin kann jede gegebene Gleichung durch die Substitution: $x = \frac{y}{p}$ in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln ein beliebiges, durch den Nenner p bestimmtes Vielfaches von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Die Vergleichung des für die verwandelte Gleichung gefundenen Ausdruckes $y^m + a p y^{m-1} + b p^2 y^{m-2} + \ldots + i p^{m-1} y + k p^m = o$ mit dem Ausdrucke der gegebenen: $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \ldots + i x + k = o$ zeigt, daß man nur die Coefficienten der Glieder der letztern mit den Gliedern der geometrischen Progression $1, p, p^2, p^3, \ldots . p^{m-1}, p^m$ der Ordnung nach multipliciren dürfe, um die Coefficienten der Glieder der erstern zu erhalten. Wenn die gegebene Gleichung unvollständig ist, so schreibe man die fehlenden Glieder mit ihren Coefficienten $= o$ an die gehörigen Stellen, damit die Glieder der geometrischen Progression in gehöriger Ordnung multiplicirt werden.

§. 50.

Setzt man $p = \frac{1}{q}$, mithin $x = q y$, so wird der Ausdruck für die verwandelte Gleichung: $y^m + \frac{a}{q} y^{m-1} + \frac{b}{q^2} y^{m-2} + \ldots + \frac{i y}{q^{m-1}} + \frac{k}{q^m} = o$. Ihre Wurzeln sind die Producte aus $\frac{1}{q}$ mit den Wurzeln der gegebenen Gleichung (§. 49.), also die Quotienten, welche man erhält, wenn man die Wurzeln der gegebenen Gleichung durch q dividirt; und man erhält für diesen Fall die Coefficienten der Glieder in der verwandelten Gleichung, wenn man die Coefficienten der Glieder der gegebenen Gleichung der Ordnung nach durch die Glieder der geometrischen Progression: $1, q, q^2, q^3, \ldots q^{m-1}, q^m$ dividirt.

§. 51.

Durch Hülfe der in §. 49. angeführten Verwandlung läßt sich aus jeder Gleichung, in welcher ein oder mehrere Coefficien-

ten Brüche sind, eine andere bilden, bey welcher in den Coefficienten der Glieder die Nenner der Brüche weggeschafft sind.

Man verwandle nämlich die Gleichung so, daß jede Wurzel mit einer Zahl p multiplicirt sey, welche durch jeden von den Nennern theilbar ist.

Z. B. für die Gleichung

$x^4 - \frac{127}{12} x^3 + \frac{133}{24} x^2 + \frac{73}{24} x - \frac{5}{4} = 0$ setze man $p = 24$,

dann ist die verwandelte Gleichung:

$y^4 - \frac{127.24}{12} y^3 + \frac{133.24^2}{24} y^2 + \frac{73.24^3}{24} y - \frac{5.24^4}{4} = 0$

(§. 49.), oder

$y^4 - 254\, y^3 + 3192\, y^2 + 42048\, y - 414720 = 0$ und $x = \frac{y}{24}$.

Statt der Gleichung, die man auf diese Art erhält, kann man öfters eine andere finden, in welcher die Coefficienten der Glieder kleinere Zahlen sind; wenn man für p die kleinste von denjenigen Zahlen nimmt, welche durch den Nenner des zweyten Gliedes, deren Quadrate durch den Nenner des dritten Gliedes, deren Cubi durch den Nenner des vierten Gliedes u. s. f. theilbar sind.

Im vorigen Beyspiele muß wegen des Nenners 12 im zweyten Gliede erstlich $p = 12$ gesetzt werden; dann ist aber auch zugleich p^2 und p^3 durch 24 und p^4 durch 4 theilbar; daher behalte man $p = 12$, und man bekömmt

$y^4 - \frac{127.12}{12} y^3 + \frac{133.12^2}{24} y^2 + \frac{73.12^3}{24} y - \frac{5.12^4}{4} = 0$, oder

$y^4 - 127\, y^3 + 798\, y^2 + 5256\, y - 25920 = 0$, wo dann $x = \frac{y}{12}$ ist.

Es seyen ferner die Nenner der Brüche aus der Gleichung $x^3 + \frac{11}{18} x - \frac{4}{75} = 0$ wegzuschaffen; so muß, weil 18 der Nenner des dritten Gliedes ist, $\frac{p^2}{18}$ oder $\frac{p^2}{2.3^2}$ eine ganze Zahl seyn,

und daher dieses Nenners wegen, $p = 2.3$ genommen werden Aber es muß auch $\frac{p^3}{75}$ oder $\frac{p^3}{3.5^2}$ eine ganze Zahl seyn, und da $\frac{2^3.3^3}{3.5^2}$ keine ganze Zahl ist, so muß p des Nenners 3.5^2 wegen $= 2.3.5 = 30$ gesetzt werden. Man erhält dann aus der Gleichung $x^3 + o.x^2 + \frac{11}{18}x - \frac{4}{75} = o$ folgende:

$$y^3 + o.30\,y^2 + \frac{11.30^2}{18}\,y - \frac{4.30^3}{75} = o, \text{ oder}$$

$$y^3 + 550\,y - 1440 = o, \text{ wo } x = \frac{y}{30} \text{ ist.}$$

§. 52.

In $x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + \ldots + i\,x + k = o$ setze man $y + p$ statt x, so bekömmt man $(y+p)^m + a\,(y+p)^{m-1} + b\,(y+p)^{m-2} + \ldots + i(y+p) + k = o$; oder, wenn man durch Entwicklung der Potenzen $(y+p)^m$, $(y+p)^{m-1}$, ... (§. 10.) ordnet,

$$\left.\begin{matrix} y^m + mp \\ + a \end{matrix}\right\} y^{m-1} + \left.\begin{matrix} \frac{m(m-1)}{1.2}p^2 \\ + (m-1)ap \\ + b \end{matrix}\right\} y^{m-2} + \ldots + \begin{matrix} p^m = o \\ + ap^{m-1} \\ + bp^{m-2} \\ + \ldots \\ + ip \\ + k \end{matrix}$$

Bezeichnen α, β, γ, ... wieder die Wurzeln der erstern Gleichung, so müssen $\alpha - p$, $\beta - p$, $\gamma - p$, ... die Wurzeln der letztern seyn, weil ihr Ausdruck nur dann $= o$ werden kann, wenn $y + p = \alpha$, oder $y + p = \beta$, oder $y + p = \gamma$, ... ist.

Setzt man daher in einer gegebenen Gleichung statt der unbekannten Größe x die Summe einer andern unbekannten Größe y, und einer willkürlichen Zahl p, so wird dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, in welcher jede Wurzel die Differenz einer jeden Wurzel der gegebenen Gleichung und der Zahl p ist.

§. 53.

Das zweyte Glied der verwandelten Gleichung (§. 52.) verschwindet, wenn man p so nimmt, daß $mp + a = o$ wird, wenn man also $p = -\frac{a}{m}$ und mithin $x = y - \frac{a}{m}$ setzt.

Um daher aus einer Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen, setze man die unbekannte Größe x der Differenz einer andern unbekannten Größe y und des Quotienten $\frac{a}{m}$ gleich, welcher erhalten wird, wenn man den Coefficienten des zweyten Gliedes durch den Exponenten der Potenz der unbekannten Größe im ersten Gliede dividirt.

Um z. B. aus der Gleichung $x^3 + 6x^2 - x - 8 = 0$ das zweyte Glied wegzuschaffen, setze man $x = y - \frac{6}{3} = y - 2$; dann ist

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ +6x^2 &= +6y^2 - 24y + 24 \\ -x &= -y + 2 \\ -8 &= -8, \end{aligned}$$

und also die verwandelte Gleichung

$$y^3 - 13y + 10 = 0.$$

Soll ferner aus der Gleichung $x^4 - 7x^3 + 5 = 0$ das zweyte Glied weggeschafft werden, so muß man $x = y + \frac{7}{4}$ setzen; daraus folgt

$$\begin{aligned} x^4 &= y^4 + 7y^3 + \frac{6.7^2}{4^2}y^2 + \frac{4.7^3}{4^3}y + \frac{7^4}{4^4} \\ -7x^3 &= -7y^3 - \frac{7.3.7}{4}y^2 - \frac{7.3.7^2}{4^2}y - \frac{7.7^3}{4^3} \\ +5 &= +5; \end{aligned}$$

folglich ist $y^4 - \frac{147}{8}y^2 - \frac{343}{8}y - \frac{5923}{256} = 0$ die verwandelte Gleichung.

§. 54.

Gibt man der unbekanntn Größe in der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + ix + k = 0$ einen beliebigen Werth p, so erhält man den Ausdru $p^m + ap^{m-1} + bp^{m-2} + \ldots + ip + k$, und dieser ist nur $= 0$, wenn p eine Wurzel der Gleichung ist. Ueberhaupt aber $p^m + ap^{m-1} + \ldots + k$ die Größe des letzten Gliedes ei Gleichung, deren Wurzeln: $\alpha - p$,

$\beta - p$, $\gamma - p$ ꝛc. sind, wenn α, β, γ ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $x^m + a x^{m-1} + \ldots + k = o$ vorstellen (§. 52.)

§. 55.

Wenn die Exponenten aller Potenzen der unbekannten Größe x einer unvollständigen Gleichung vom mten Grade ein gemeines Maß n haben, so läßt sich die Auflösung der Gleichung auf die Auflösung einer andern vom Grade $\frac{m}{n}$ reduciren, wenn man $x = y^{\frac{1}{n}}$ setzt, und die vorkommenden Potenzen von x durch Potenzen von y ausdrückt, weil die letztern in diesem Falle ganze positive Zahlen als Exponenten erhalten müssen. So wird z. B. die Auflösung der Gleichung $x^8 + a x^6 + b x^2 + c = o$, weil alle Exponenten der Potenzen von x durch 2 theilbar sind, auf die Auflösung einer Gleichung vom 4ten Grade gebracht, wenn man $x = y^{\frac{1}{2}}$ setzt; denn man erhält: $y^4 + a y^3 + b y + c = o$.

IV. Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit Einer unbekannten Größe.

A) Von der Auflösung der quadratischen und der cubischen Gleichungen.

§. 6.

Jede geordnete quadratische Gleichung ist unter dem Ausdrucke $x^2 + a x + b = o$ begriffen (§. 24.), woraus $x^2 + a x = -b$ und $x^2 + a x + (\frac{1}{2} a)^2 = (\frac{1}{2} a)^2 - b$, nämlich $(x + \frac{1}{2} a)^2 = (\frac{1}{2} a)^2 - b$ folgt; also müssen, damit $x^2 + a x + b$ Null wer-

de, für x solche Werthe genommen werden, daß $x + \frac{1}{2}a$ zum Quadrate erhoben, $(\frac{1}{2}a)^2 - b$ gebe. Dieses ist nun der Fall, wenn man entweder $x + \frac{1}{2}a = +\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b}$, oder $x + \frac{1}{2}a = -\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b}$, mithin, wenn man $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b}$ sezt. Demnach ist $-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b}$, der Ausdruck für beyde Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = o$, welche unmöglich sind, wenn b im Ausdrucke der Gleichung eine positive Größe bezeichnet, die $> (\frac{1}{2}a)^2$ ist; außer diesem sind beyde möglich.

Bey der reinen quadratischen Gleichung (§. 20.) ist $a = o$; folglich sind ihre Wurzeln $+\sqrt{-b}$ und $-\sqrt{-b}$, welche daher nur dann möglich sind, wenn b im Ausdrucke der Gleichung $x^2 + b = o$ eine negative Größe ist.

§. 57.

Der Ausdruck für jede cubische Gleichung ist $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ (§. 24.), und wenn man dabey $a = o$ und $b = o$ sezt, so erhält man $x^3 + c = o$, den Ausdruck für jede reine cubische Gleichung. Aus diesem folgt $x^3 = -c$ und $x = \sqrt[3]{-c} = -\sqrt[3]{c}$ eine Wurzel derselben.

Um die beyden übrigen Wurzeln zu erhalten, dividire man $x^3 + c$ durch den einfachen Factor $x + \sqrt[3]{c}$ (§. 40.), so ist der Quotient $x^2 - x\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2}$ der Ausdruck derjenigen quadratischen Gleichung, welche die beyden übrigen Wurzeln enthält.

Diese zu finden, sezze man also

$x^2 - x\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2} = o$, so ist nach §. 56.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{c^2})} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c} \pm \sqrt{(-\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{c^2})}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-c} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-c}\sqrt{-3} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-c}\,(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Die reine cubische Gleichung hat daher folgende drey Wurzeln: $-\sqrt[3]{-c}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-c}\,(1 + \sqrt{-3})$ und $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-c}\,(1 - \sqrt{-3})$,

wovon die erste möglich ist, die beyden letzten aber immer unmöglich sind.

§. 58.

Man setze im Ausdrucke der reinen cubischen Gleichung $x^3 + c = o$, $c = -\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)^3$; so erhält man $x^3 - \left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)^3 = o$, oder

A) $x^3 - 3\sqrt[3]{pq}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right) - (p + q) = o$, von welcher Gleichung die drey Wurzeln:

$$\alpha = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q},$$

$$\beta = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)(1 + \sqrt{-3}) \text{ und}$$

$$\gamma = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)(1 - \sqrt{-3}) \text{ sind (§. 57.).}$$

Setzt man in A, x statt $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, so gibt dieses die unreine cubische Gleichung:

B) $x^3 - 3\sqrt[3]{pq}.x - (p + q) = o$, von deren Wurzeln Eine $= \alpha$ ist, deren beyde übrigen aber von β und γ unterschieden sind; denn da der Ausdruck A immer $= o$, folglich $x^3 - (p + q) = 3\sqrt[3]{pq}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)$ wird, man mag $x = \alpha$, oder $x = \beta$, oder $x = \gamma$ setzen, so verwandelt sich der Ausdruck B bey diesen Werthen von x in $3\sqrt[3]{pq}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right) - 3\sqrt[3]{pq}.x$, und wird daher nur für $x = \alpha$ Null.

Nun lassen sich aber aus der bekannten Wurzel: $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ die beyden übrigen Wurzeln der Gleichung B nach §. 40. finden. Es ist nämlich

$$[x^3 - 3\sqrt[3]{pq}.x - (p + q)] : [x - \left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)] = x^2 + \left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right)x + \left(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}\right),$$

und dieser Quotient $= o$ gesetzt, gibt

$x = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) \pm \frac{1}{2}(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q})\sqrt{-3}$ (§. 56.),
wodurch nun alle Wurzeln der Gleichung B bekannt sind.

§. 59.

Bezeichnet man die Coefficienten der beyden letzten Glieder der Gleichung B (§. 58.) mit $-f$ und $-g$, so ist

C) $x^3 - fx - g = 0$

der Ausdruck dieser Gleichung, und man hat $3\sqrt[3]{pq} = f$ und $p + q = g$, wodurch also p und q durch f und g bestimmt ist. Aus diesen Gleichungen ist $pq = (\frac{1}{3}f)^3$, und $p^2 + 2pq + q^2 = g^2$, mithin $p^2 - 2pq + q^2 = g^2 - 4(\frac{1}{3}f)^3$, also $p - q = \sqrt{g^2 - 4(\frac{1}{3}f)^3} = 2\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3}$, oder, wenn man zur Abkürzung $(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3 = R$ setzt, $p - q = 2\sqrt{R}$. Aus diesen Werthen von $p + q$ und $p - q$ folgt endlich $p = \frac{1}{2}g + \sqrt{R}$ und $q = \frac{1}{2}g - \sqrt{R}$; daher sind die Wurzeln der Gleichung C folgende:

1.) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}$,

2.) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}\right)\sqrt{-3}$,

3.) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}\right)\sqrt{-3}$.

Ebendieselben Werthe erhält man auch, wenn man bey der Bestimmung von $p - q$ aus $p^2 - 2pq + q^2$, $\sqrt{R}$ negativ nimmt.

§. 60.

Wenn f (§. 59.) positiv, und dabey $(\frac{1}{3}f)^3 > (\frac{1}{2}g)^2$ ist, so wird R negativ, und dann haben alle Wurzeln der Gleichung C die Form von unmöglichen Größen. Da man aber aus §. 44. weiß, daß wenigstens Eine davon möglich seyn müsse, so verdient hier untersucht zu werden, was es in diesem Falle mit den Wurzeln für eine Bewandtniß habe.

Man setze deßhalb

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}g+\sqrt{R}} = P + Q$, und $\sqrt[3]{\frac{1}{2}g-\sqrt{R}} = P - Q$, so sind die drey Wurzeln der Gleichung C durch P und Q ausgedrückt, folgende:

1.) $2P$, 2.) $-P+Q\sqrt{-3}$, und 3.) $-P-Q\sqrt{-3}$.

Auch ist $\frac{1}{2}g + \sqrt{R} = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3$,

und $\frac{1}{2}g - \sqrt{R} = P^3 - 3P^2Q + 3PQ^2 - Q^3$,

woraus $\frac{1}{2}g = P(P^2 + 3Q^2)$ und $\sqrt{R} = Q(3P^2 + Q^2)$ folgt.

Nun sind P^2 und Q^2 immer möglich, folglich muß wegen $P = \frac{1}{2}g : (P^2 + 3Q^2)$ auch P immer möglich seyn; wegen $Q = \sqrt{R} : (3P^2 + Q^2)$ ist aber $Q\sqrt{-3} = \sqrt{-3R} : (3P^2 + Q^2)$ möglich oder unmöglich, jenachdem R negativ oder positiv ist.

Aus diesem ergibt sich, daß von den Wurzeln der Gleichung C nur die erste möglich sey, wenn R positiv, daß aber alle drey Wurzeln möglich seyen, wenn R negativ ist.

§. 61.

Im zuletzt angeführten Falle erhält man die möglichen Werthe der Wurzeln durch Reihen ausgedrückt, wenn man $\sqrt[3]{\frac{1}{2}g \pm \sqrt{R}} = \left(\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ nach §. 12. entwickelt. Allein die Anwendung der Trigonometrie gibt für diesen Fall folgende leichtere Auflösungs-Methode:

Wenn K den Cosinus eines Winkels, und x den Cosinus des dritten Theiles desselben bezeichnet, so wird x durch K und durch den Radius r vermittelst folgender Gleichung bestimmt:

$$x^3 - \frac{3}{4}r^2 x - \frac{1}{4}r^2 K = 0.$$

Da diese Gleichung eine cubische ist, folglich drey Wurzeln hat, so scheint dieselbe auszudrücken, daß der Cosinus des dritten Theiles eines Winkels drey verschiedene Werthe haben könne. Dieses ist so zu erklären: Zu einer bestimmten Zahl K, als Cosinus betrachtet, gehört nicht Ein bestimmter Winkel, sondern da alle Winkel, deren Summe oder Unterschied 360° beträgt,

einerley Cosinus haben, so ist, wenn φ die Zahl der Grade des hohlen Winkels bezeichnet, wozu K als Cosinus gehört, K auch der Cosinus aller folgenden Winkel:

$360 + \varphi$, $2.360 + \varphi$, $3.360 + \varphi$, $4.360 + \varphi$, ...
$360 - \varphi$, $2.360 - \varphi$, $3.360 - \varphi$, $4.360 - \varphi$, ...

Nun ist durch die Gleichung nicht bestimmt, daß K ausschließlich als der Cosinus des Winkels φ, oder als der Cosinus des Winkels $360 + \varphi$ ꝛc. zu nehmen sey; folglich muß die Auflösung der Gleichung alle diejenigen Werthe angeben, welche x zukommen, von welchem der vorhin angegebenen Winkel man auch K als Cosinus betrachten mag; d. h. die Würzeln der Gleichung müssen die Größe der Cosinus aller folgenden Winkel:

$\frac{1}{3}\varphi$, $120 + \frac{1}{3}\varphi$, $2.120 + \frac{1}{3}\varphi$, $3.120 + \frac{1}{3}\varphi$, $4.120 + \frac{1}{3}\varphi$, ...
$120 - \frac{1}{3}\varphi$, $2.120 - \frac{1}{3}\varphi$, $3.120 - \frac{1}{3}\varphi$, $4.120 - \frac{1}{3}\varphi$, ...

ausdrücken.

Allein in jeder von den beyden Reihen dieser Winkel ist der Unterschied des vierten und ersten Gliedes, der des fünften und zweyten ꝛc. $= 360°$; also sind die Cosinus der Winkel, welche Glieder dieser beyden Reihen nach dem dritten sind, einerley mit denen der Winkel:

$\frac{1}{3}\varphi$, $120 + \frac{1}{3}\varphi$, $2.120 + \frac{1}{3}\varphi$, $120 - \frac{1}{3}\varphi$, $2.120 - \frac{1}{3}\varphi$, und
$3.120 - \frac{1}{3}\varphi$.

Da aber die Summen der Winkel

$3.120 - \frac{1}{3}\varphi$ und $\frac{1}{3}\varphi$,
$2.120 - \frac{1}{3}\varphi$ und $120 + \frac{1}{3}\varphi$,
$2.120 + \frac{1}{3}\varphi$ und $120 - \frac{1}{3}\varphi$

ebenfalls 360° betragen, so haben auch diese Winkel gleiche Cosinus; folglich sind die Cosinus aller Winkel, welche Glieder der beyden vorhergehenden Reihen sind, einerley mit denen der Winkel: $\frac{1}{3}\varphi$, $120 + \frac{1}{3}\varphi$, $120 - \frac{1}{3}\varphi$; daher hat x in der Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}r^2 x - \frac{1}{4}r^2 K = 0$ nur die Werthe: Cos. $\frac{1}{3}\varphi$, Cos. $(120 + \frac{1}{3}\varphi)$, Cos. $(120 - \frac{1}{3}\varphi)$, und keine andern.

Setzt man in C (§. 59.), $f = \frac{3}{4}r^2$ und $g = \frac{1}{4}r^2 K$, so verwandelt sich diese Gleichung in $x^3 - \frac{3}{4}r^2 x - \frac{1}{4}r^2 K = 0$; ihre Wurzeln sind:

Cos. $\frac{1}{3}\varphi$, Cos. $(120 + \frac{1}{3}\varphi)$, Cos. $(120 - \frac{1}{3}\varphi)$, und es wird $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}f}$, $K = g : \frac{1}{3}f$.

Zur Bestimmung von φ ist aber nothwendig, daß r möglich, also f positiv, und daß K nicht $> r$, folglich $g : \frac{1}{3}f$ nicht $> 2\sqrt{\frac{1}{3}f}$, oder $(\frac{1}{2}g)^2$ nicht $> (\frac{1}{3}f)^3$, d. h. R. (§. 59.) negativ oder Null sey. Man kann also nur dann $f = \frac{3}{4}r^2$ und $g = \frac{1}{4}r^2$ K setzen, wenn C lauter mögliche Wurzeln hat (§. 60.)

Hätte man in einem solchen Falle Tafeln, in welchen die Cosinus der Winkel für sin. tot. $= 2\sqrt{\frac{1}{3}f}$ berechnet wären, so dürfte man nur für $K = g : \frac{1}{3}f$ als Cosinus den zugehörigen hohlen Winkel φ aufsuchen, dann wären Cos. $\frac{1}{3}\varphi$, Cos. $(120° + \frac{1}{3}\varphi)$ und Cos. $(120° - \frac{1}{3}\varphi)$ aus ebendenselben Tafeln genommen, die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - fx - g = 0$.

Allein zu diesem Zwecke können auch die Tafeln gebraucht werden, aus welchen sich die Cosinus der Winkel für sin. tot. $= 1$ finden lassen; denn wenn man die Cosinus für sin. tot. $= 1$ mit cos. bezeichnet, so ist für jeden Winkel m, Cos. m $=$ r cos. m; mithin ist cos. $\varphi = \frac{\text{Cos. } \varphi}{r} = g : \frac{1}{3}f$, $2\sqrt{\frac{1}{3}f} = \frac{1}{2}g : (\sqrt{\frac{1}{3}f})^3$, wozu aus den Tafeln φ gefunden wird; und dann erhält man ebenfalls durch Hülfe der Tafeln die drey Wurzeln:

$2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \text{cos. } \frac{1}{3}\varphi$, $2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \text{cos. } (120° + \frac{1}{3}\varphi)$ und

$2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \text{cos. } (120° - \frac{1}{3}\varphi)$.

§. 62.

Wenn R (§. 59.) $= 0$ ist, so sind ebenfalls alle drey Wurzeln möglich, und zwey davon sind einander gleich; denn nach §. 59. sind in diesem Falle die Wurzeln: $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}g}$, $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}g}$ und $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}g}$.

§. 63.

Auf die angeführten Auflösungen der Gleichung $x^3 - fx - g = 0$ läßt sich die Auflösung jeder, auch vollständigen cubischen Gleichung bringen, weil sich jede durch Wegschaffung des zweyten Gliedes (§. 53.) auf die Form $x^3 - fx - g = 0$ bringen läßt.

Findet sich dann $(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3 = R$ positiv, so hat die Gleichung nur die mögliche Wurzel:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}g + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}g - \sqrt{R}}$$ (§. 60.)

Wird R negativ, so setze man $\frac{1}{2}g : (\sqrt{\frac{1}{3}f})^3 = \cos.\varphi$ und die Wurzeln sind:

$2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \cos \frac{1}{3}\varphi$, $2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \cos.(120° + \frac{1}{3}\varphi)$ und $2\sqrt{\frac{1}{3}f} \times \cos.(120° - \frac{1}{3}\varphi)$ (§. 61.)

Wird $R = 0$, so ist Eine Wurzel $= 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}g}$, und jede der beyden übrigen ist $= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}g}$ (§. 62.)

Für den Fall, in welchem $f = 0$ wird, ist die verwandelte Gleichung rein, und ihre mögliche Wurzel $= \sqrt[3]{g}$ (§. 57.).

Aus den Wurzeln der verwandelten Gleichung lassen sich hierauf die der gegebenen finden (§. 52.).

Beyspiel I.

Es seyen die Radien R und r der größern und kleinern Grundfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels nebst der Achse a gegeben; derselbe soll durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene so getheilet werden, daß der auf der Seite der kleinern Grundfläche liegende Theil, $\frac{m}{n}$ vom Inhalte des abgekürzten Kegels erhalte. —

Bezeichnet man den Theil der Achse zwischen der Durchschnittsebene und der kleinern Grundfläche mit x, und die Verhältnißzahl des Durchmessers zum Umkreise mit π, so findet man die Größe des zwischen den genannten Ebenen liegenden Theiles des Kegels =

$\frac{1}{3}\pi x [3r^2 + \frac{3r(R-r)}{a} \cdot x + \frac{(R-r)^2}{a^2} \cdot x^2]$, und die Größe des gegebenen abgekürzten Kegels $= \frac{1}{3}a\pi(R^2 + r^2 + Rr)$; demnach ist der Bedingung zu Folge

$$x[3r^2 + \frac{3r(R-r)}{a} \cdot x + \frac{(R-r)^2}{a^2} x^2] = \frac{m}{n} a(R^2 + r^2 + Rr),$$

aus welcher Gleichung, wenn man sie nach §. 22. ordnet,

$$x^3 + \frac{3ar}{R-r} \cdot x^2 + \frac{3a^2r^2}{(R-r)^2} \cdot x - \frac{ma^3(R^3-r^3)}{n(R-r)^3} = o \text{ wird.}$$

Um aus derselben das zweyte Glied fortzuschaffen, nehme man $x = y - \frac{ar}{R-r}$, und man erhält durch diese Substitution,

$$y^3 - \frac{a^3}{(R-r)^3}\left[r^3 + \frac{m}{n}(R^3-r^3)\right] = o,$$ welche Gleichung rein ist,

und daher nur die mögliche Wurzel $y = \frac{a}{R-r}\sqrt[3]{r^3 + \frac{m}{n}(R^3-r^3)}$

hat.

Also ist $$x = \frac{a}{R-r}\sqrt[3]{r^3 + \frac{m}{n}(R^3-r^3)} - \frac{ar}{R-r}$$

$$= \frac{a}{R-r}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{n-m}{n}\right)r^3 + \frac{m}{n}R^3} - r\right),$$

und hiemit ist die Aufgabe aufgelöset, weil durch x die Größe des abzuschneidenden Theiles bestimmt ist.

Beyspiel II.

Es sey die Gleichung $x^3 + 15mx^2 + 72m^2x + 112m^3 = o$ aufzulösen. —

Nach der Wegschaffung des zweyten Gliedes, zu welchem Zwecke $x = y - 5m$ gesetzt werden muß, erhält man

$y^3 - 3m^2y + 2m^3 = o.$

Diese Gleichung unter $y^3 - fy - g = o$ subsumirt, gibt $f = 3m^2$ und $g = -2m^3$, also $(\frac{1}{3}f)^3 = m^6$ und $(\frac{1}{2}g)^2 = (-m^3)^2 = +m^6$; daher ist $\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3} = \sqrt{m^6 - m^6} = o$, folglich sind die drey Wurzeln 1.) $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}g} = 2\sqrt[3]{-m^3} = -2m$;

2. u. 3.) $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}g} = -\sqrt[3]{-m^3} = +m$; woraus die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

1.) $x = -2m - 5m = -7m$, 2.) $x = m - 5m = -4m$

und 3.) $x = -4m$ folgen.

Beyspiel III.

Es sey $x^3 - 8x^2 + 22x - 23 = 0$; so ist für $x = y + \frac{8}{3}$, $y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{61}{27} = 0$; also $f = -\frac{2}{3}$, $g = +\frac{61}{27}$; folglich $(\frac{1}{3}f)^3 = (-\frac{2}{9})^3 = -\frac{2^3}{9^3}$, $(\frac{1}{2}g)^2 = (\frac{61}{54})^2 = \frac{61^2}{54^2}$, und daraus $\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3} = \frac{1}{54}\sqrt{3753}$; mithin ist nur Eine Wurzel möglich, und dieselbe ist

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{61}{2} + \sqrt{3753}} + \sqrt[3]{\frac{61}{2} - \sqrt{3753}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{61{,}13086} - \sqrt[3]{0{,}13086}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(3{,}939310 - 0{,}507694) = 1{,}143872.$$

Aus diesem folgt endlich $x = +3{,}8110538$.

Beyspiel IV.

Um die Gleichung $x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{289}{40} = 0$ aufzulösen, setze man $x = y - \frac{3}{2}$, so bekömmt man $y^3 - 8y + \frac{7}{5} = 0$; mithin ist $f = 8$, $g = -\frac{7}{5}$; $(\frac{1}{3}f)^3 = (\frac{8}{3})^3 = \frac{512}{27}$, $(\frac{1}{2}g)^2 = (-\frac{7}{10})^2 = +\frac{49}{100}$, und daher $\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3} = \sqrt{\frac{49}{100} - \frac{512}{27}}$ unmöglich.

Man setze also $\frac{1}{2}g : \sqrt{(\frac{1}{3}f)^3} = \cos.\varphi$.

Bedient man sich der Bequemlichkeit wegen der Logarithmen, so ist die Rechnung folgende:

log. 8	= 0,9030900
log. 3	= 0,4771213
log. $\frac{1}{3}f$	= 0,4259687
log. $\sqrt{\frac{1}{3}f}$	= 0,2129843
log. $\sqrt{(\frac{1}{3}f)^3}$	= 0,6389530
log. $\frac{1}{2}g$ = log. 0,7	= 0,8450980 − 1
log. cos. φ	= 0,2067450 − 1

$\varphi = 180° - 80° 44' 59''$

$= 99° 15' 1''$, weil cos. φ wegen $g = -\frac{7}{5}$ negativ ist.

Aus diesem folgt

$\frac{1}{3}\varphi$	=	33°	5′ 0″
$120° + \frac{1}{3}\varphi$	=	153°	5′ 0″
$120° - \frac{1}{3}\varphi$	=	86°	55′ 0″

log. $\sqrt{\frac{1}{3}f}$	= 0,2129843
log. 2	= 0,3010300
log. $2\sqrt{\frac{1}{3}f}$	= 0,5140143

Also ist für die erste Wurzel:

$$\log. 2\sqrt{\tfrac{1}{3}f} = 0{,}5140143$$
$$\log. \cos. \tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}9231805 - 1$$
$$\log. y = 0{,}4371948$$
$$y = 2{,}736496$$

Für die zweyte Wurzel:

$$\log. 2\sqrt{\tfrac{1}{3}f} = 0{,}5140143$$
$$\log. \cos. (120° + \tfrac{1}{3}\varphi) = 0{,}9502022 - 1$$
$$\log. y = 0{,}4642165$$
$$y = -2{,}912169,$$ [weil cos. $(120° + \tfrac{1}{3}\varphi)$ negativ ist.]

Für die dritte Wurzel:

$$\log. 2\sqrt{\tfrac{1}{3}f} = 0{,}5140143$$
$$\log. \cos. (120° - \tfrac{1}{3}\varphi) = 0{,}7306882 - 2$$
$$\log. y = 0{,}2447025 - 1$$
$$y = 0{,}175672$$

Daraus ergeben sich die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = 2{,}736496 - 1{,}5 = +1{,}236496$$
$$x = -2{,}912169 - 1{,}5 = -4{,}412169$$
$$x = 0{,}175672 - 1{,}5 = -1{,}324328.$$

§. 64.

Die im §. 59. angeführte Auflösung der cubischen Gleichungen gibt oft rationale Wurzeln unter der Form einer Irrational-Größe; so erhält man z. B. dadurch für die mögliche Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 5x - 25 = 0$ den Ausdruck

$$1 + 2\left(\sqrt[3]{2 + \tfrac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \tfrac{10}{9}\sqrt{3}}\right),$$ welche Wurzel rational, und $= 5$ ist.

Auch die allgemeinen Auflösungen der biquadratischen Gleichungen (für Gleichungen von höhern Graden gibt es noch keine solchen), führen zuweilen auf irrationale Ausdrücke für rationale Wurzeln.

Außer dem hängt die Auflösung einer jeden biquadratischen Gleichung von der Auflösung einer cubischen ab, und es ist schon aus diesem begreiflich, daß die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade viel verwikelter ausfallen müsse, als die der cubischen.

Dieser Weitläufigkeit wegen wird die allgemeine Auflösung biquadratischer Gleichungen hier übergangen, und nur noch gezeigt, wie die rationalen Wurzeln einer jeden höhern Gleichung

durch Versuche gefunden, und auch die irrationalen Wurzeln durch Näherung beliebig genau angegeben werden können, wenn im letzten Falle die Coefficienten aller Glieder der Gleichung bestimmte, also durch Ziffern ausgedrückte Zahlen sind.

B) Von der Bestimmung der rationalen Wurzeln der höhern Gleichungen.

§. 65.

Da das letzte Glied einer geordneten Gleichung das Product aller Wurzeln ist (§. 41.), und die rationalen Wurzeln nur ganze Zahlen seyn können, wenn die Coefficienten der Glieder ganze Zahlen sind (§. 45.), so sind alle rationalen Wurzeln einer solchen Gleichung unter den Factoren des letzten Gliedes enthalten.

Man schaffe daher, wenn gebrochene Coefficienten vorhanden seyn sollten, die Nenner der Brüche weg (§. 51.), zerlege das letzte Glied in alle einfachen und zusammengesetzten Factoren, und gebe

1.) der unbekannten Größe folgweise den Werth eines jeden solchen Factors, und zwar nur positiv oder nur negativ genommen, wenn man nach §. 46. findet, daß die Gleichung entweder keine negative oder keine positive Wurzel haben könne; hat aber keiner von diesen beyden Fällen Statt, so muß jeder Factor sowohl positiv als negativ genommen, substituirt werden.

2.) Erhält auf diese Art der Ausdruck der Gleichung durch irgend einen Factor den Werth Null, so ist dieser Factor eine Wurzel; man kann alsdann daraus einen einfachen Factor (§. 40.) bilden, durch denselben den Ausdruck der gegebenen Gleichung dividiren, und den Quotienten $= 0$ setzen, so hat man eine um Einen Grad niedrigere Gleichung, deren Wurzeln die übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, von welchen Wurzeln man wieder eine auf die angegebene Art suche.

3.) Hat man alle Wurzeln bis auf zwey gefunden, so kömmt man durch dieses Verfahren auf eine quadratische Gleichung, und man findet daraus die beyden noch übrigen Wurzeln nach §. 56., sie mögen rational seyn oder nicht.

Beyspiel I.

Die rationalen Wurzeln der Gleichung $x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 78x^2 - 3x + 315 = 0$ zu finden. —

Die Factoren des letzten Gliedes sind:

1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, und 315.

Bezeichnet man den Werth des Ausdruckes der Gleichung mit y, so ist

für $x = 1$, $y = 1 - 9 + 2 + 78 - 3 + 315$
$= 396 - 12 = + 384$,

„ $x = -1$, $y = -1 - 9 - 2 + 78 + 3 + 315$
$= 396 - 12 = + 384$,

„ $x = 3$, $y = + 243 - 729 + 54 + 702 - 9$
$+ 315 = 1314 - 738 = + 576$,

„ $x = -3$, $y = - 243 - 729 - 54 + 702 + 9$
$+ 315 = 1026 - 1026 = 0$;

also ist -3 eine Wurzel, und mithin $x + 3$ ein einfacher Factor.

Ferner ist $(x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 78x^2 - 3x + 315) : (x+3) = x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 36x + 105$, welcher Quotient z heiße, und $x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 36x + 105 = 0$ ist die Gleichung, welche die noch übrigen vier Wurzeln der gegebenen enthält, und deren letztes Glied in Factoren zerlegt, die Zahlen: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 und 105 gibt.

Bey der Untersuchung, welche von diesen Zahlen Wurzeln seyen, werden die Faktoren $\pm$ 1 und $+3$ weggelassen, weil diese Zahlen keine Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und die vorliegende keine andern Wurzeln enthält, als die gegebene; auch sind wegen der beständigen Abwechslungen der Zeichen + und — die übrigen Factoren von 105 positiv genommen zu substituiren (§. .46).

Man setze demnach $x = 5$, so ist

$z = 625 - 1500 + 950 - 180 + 105 = 1680 = 1680 = 0$;

also ist $+5$ ebenfalls eine Wurzel, und $(x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 36x + 105) : (x - 5) = x^3 - 7x^2 + 3x - 21 = v$.

Nun sind 1, 3, 7 und 21 die Factoren des letzten Gliedes der Gleichung $x^3 - 7x^2 + 3x - 21 = 0$, und man darf die Prüfung nur noch mit den Factoren $+7$ und $+21$ anstellen; es

wird aber, $x = 7$ gesetzt, $v = 343 - 343 + 21 - 21 = 0$, also ist $+ 7$ die dritte Wurzel der gegebenen Gleichung, und weil $(x^3 - 7x^2 + 3x - 21) : (x - 7) = x^2 + 3$ ist, so folgen aus der quadratischen Gleichung $x^2 + 3 = 0$ die beyden noch übrigen Wurzeln: $x = \sqrt{-3}$ und $x = -\sqrt{-3}$ (§. 56.).

Die gegebene Gleichung hat demnach drey rationale Wurzeln: $-3, +5, +7$, und zwey unmögliche: $\sqrt{-3}, -\sqrt{-3}$.

Beyspiel II.

Die rationalen Wurzeln der Gleichung $x^3 + \left(\frac{2b^2 + b - a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2b^2 - 2ab - a}{b}\right)x - 2a = 0$ zu finden. —

Um die Nenner der Brüche wegzuschaffen, setze man $x = \frac{y}{b}$, so erhält man: $y^3 + (2b^2 + b - a)y^2 + (2b^3 - 2ab^2 - ab)y - 2ab^3 = 0$.

Die Factoren des letzten Gliedes sind:
$1, 2, a, 2a, b, 2b, ab, 2ab, b^2, 2b^2, ab^2, 2ab^2, b^3, 2b^3, ab^3$ und $2ab^3$.

Würde man statt y einen der von a und b unabhängigen Factoren, nämlich ± 1, ± 2 setzen, so bliebe dadurch bloß das erste Glied eine von a und b unabhängige Zahl, und daher können sich die Glieder der Gleichung gegen einander nicht aufheben; folglich sind ± 1, und ± 2 keine Wurzeln.

Nimmt man $y = a$, und bezeichnet den Ausdruck der Gleichung mit z, so wird
$z = a^3 + 2a^2b^2 + a^2b - a^3 + 2ab^3 - 2a^2b^2 - a^2b - 2ab^3 = 0$;
also ist $+ a$ eine Wurzel.

Dann ist $z : (y - a) = y^2 + (2b^2 + b)y + 2b^3$, und aus $y^2 + (2b^2 + b)y + 2b^3 = 0$ folgen die beyden übrigen Wurzeln:
$y = -(b^2 + \frac{1}{2}b) \pm \sqrt{(b^2 + \frac{1}{2}b)^2 - 2b^3} = -(b^2 + \frac{1}{2}b) \pm \sqrt{b^4 + b^3 + \frac{1}{4}b^2 - 2b^3} = -(b^2 + \frac{1}{2}b) \pm \sqrt{b^4 - b^3 + \frac{1}{4}b^2} = -(b^2 + \frac{1}{2}b) \pm (b^2 - \frac{1}{2}b)$;
nämlich $y = -b^2 - \frac{1}{2}b + b^2 - \frac{1}{2}b = -b$
und $y = -b^2 - \frac{1}{2}b - b^2 + \frac{1}{2}b = -2b^2$

Daher sind die drey Werthe für x oder die Wurzeln der gegebenen Gleichung: $\frac{a}{b}$, — 1 und — 2 b.

§. 66.

Wenn sich bey der Prüfung eines Factors ergibt, daß derselbe keine Wurzel sey, so kann der durch diese Untersuchung erhaltene Werth des Ausdruckes der Gleichung auf folgende Art benützt werden; bey mehrern und oft vielen Factoren des letzten Gliedes sogleich zu erkennen, daß dieselben keine Wurzeln sind.

Es ist nämlich der Werth P des Ausdruckes der Gleichung, welchen derselbe erhält, wenn man statt der unbekannten Grösse was immer für eine Zahl p setzt, das letzte Glied einer andern, von welcher jede Wurzel die Differenz einer Wurzel der gegebenen und der Zahl p ist (§. 54.).

Zerlegt man P in seine Factoren, so sind alle rationalen Wurzeln der Gleichung, als deren letztes Glied die Zahl P betrachtet wird, unter diesen Factoren enthalten; daher muß jeder Factor des letzten Gliedes der gegebenen Gleichung, welcher eine Wurzel derselben ist, mit — p zusammengenommen auch ein Factor der Zahl P seyn. Alle jene Factoren des letzten Gliedes der gegebenen Gleichung, welche mit — p zusammen genommen keinen Factor von P geben, können also keine Wurzeln seyn.

Beyspiel I.

Als Factoren des letzten Gliedes der Gleichung $x^3 - 22x^2 - 80x + 2400 = 0$ findet man die Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 32, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 96, 100, 120, 150, 160, 200, 240, 300, 400, 480, 600, 800, 1200 und 2400.

Setzt man $x = 1$, so erhält man

$1 - 22 - 80 + 2400 = 2401 - 102 = 2299$, wovon die Factoren sind: 1, 11, 19, 121, 209, 3299.

Da die Gleichung sowohl positive als negative Wurzeln haben kann, so nehme man erstlich jeden Factor von 2400 positiv mit — 1 zusammen; so ergibt sich sogleich, daß nur 2, 12

und 20, positive Wurzeln seyn können, weil von allen um 1 verminderten Factoren nur diese auch Factoren von 2299 werden.

Nimmt man dann die Factoren der Zahl 2400 negativ mit — 1 zusammen, so findet man, daß nur — 10 und — 120 negative Wurzeln seyn können.

Durch die Substitution der Zahlen + 2, + 12, + 20, — 10 und — 120 ergibt sich endlich, daß + 12, + 20 und — 10 die Wurzeln dieser Gleichung seyen.

Beyspiel II.

In der Gleichung $x^4 - 16x^3 + 105x^2 - 354x + 504 = 0$, welche nur positive Wurzeln haben kann, sind die Factoren von 504: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252, 504.

$x = 1$ gibt dem Ausdrucke der Gleichung den Werth 240, und die Factoren davon sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240.

Nun geben von den Factoren der Zahl 504 positiv und mit — 1 zusammengenommen nur 2, 3, 4, 6, 7 und 9, solche Zahlen, welche auch Factoren von 240 sind.

Setzt man $x = 2$, so bekömmt man 104, und eine ähnliche Vergleichung der noch übrigen Factoren 3, 4, 6, 7 und 9 mit den Factoren von 504 schließt auch 7 und 9 von der Zahl der Wurzeln aus, und endlich findet man, daß nur 4 und 6, rationale Wurzeln seyen, woraus die einfachen Factoren $x - 4$, $x - 6$, und der quadratische $x^2 - 10x + 24$ folgen.

Um die beyden übrigen Wurzeln zu erhalten, setze man (§. 40.) den Quotienten $(x^4 - 16x^3 + 105x^2 - 354x + 504) : (x^2 - 10x + 24)$, also $x^2 - 6x + 21 = 0$, so findet man dieselben $= 3 + \sqrt{-12}$ und $3 - \sqrt{-12}$.

§. 67.

Die Prüfung der Factoren des letzten Gliedes wird besonders mühsam, wenn diese Factoren Zahlen sind, welche mit mehrern Ziffern geschrieben werden.

Zur Erleichterung der Rechnung kann folgende Regel in Anwendung gebracht werden:

Man nehme die Summe der für die unbekannte Größe gesetzten Zahl p und des Coefficienten des zweyten Gliedes, multiplicire dieselbe mit p, nehme wieder die Summe dieses Productes und des Coefficienten des folgenden Gliedes, multiplicire dieselbe ferner mit p, und fahre auf diese Art fort, bis das letzte Glied in Rechnung gebracht ist. Dabey ist aber zu merken, daß man bey der jedesmaligen Summirung und Multiplication auf die Zeichen + und — der Summanden und Factoren Rücksicht zu nehmen habe, und daß man unvollständigen Gleichungen zuerst die Form von vollständigen dadurch geben müsse, daß man die fehlenden Glieder mit ihren Coefficienten (o) an ihre gehörigen Stellen setze.

Es ist nämlich

$$x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + c\,x^{m-3} + \ldots + i\,x + k$$
$$= (x + a)\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + c\,x^{m-3} + \ldots + i\,x + k$$
$$= [(x + a)\,x + b]\,x^{m-2} + c\,x^{m-3} + \ldots + i\,x + k$$
$$= \{[(x + a)\,x + b]\,x + c\}\,x^{m-3} + \ldots + i\,x + k;$$

woraus sich die Richtigkeit der Regel ergibt, weil sich diese Methode, aus den beyden ersten Gliedern ein Product zu bilden, eben so bis zum vorletzten Gliede i x fortsetzen läßt.

Beyspiel I.

Den Werth des Ausdruckes der Gleichung: $x^3 - 58\,x^2 + 230\,x - 432 = o$ zu suchen, wenn $x = 54$ gesetzt wird. —

Die Rechnung ist nach der angeführten Regel folgende:

$x = 54$	$+ 14$
$- 58$	$\times 54$
$- 4$	56
$\times 54$	70
$- 216$	$+ 756$
$+ 230$	$- 432$
$+ 14$	$+ 324$

Der verlangte Werth, oder $54^3 - 58.54^2 + 230.54 - 432$ ist also $= + 324$.

Beyspiel II.

Zu untersuchen, ob — 48 eine Wurzel der Gleichung: $x^4 + 46x^3 - 3900x - 33984 = 0$ sey. —

Der Ausdruck der Gleichung unter der Form einer vollständigen ist:

$$x^4 + 46x^3 + 0x^2 + 3900x - 33984 = 0.$$

$x = -48$

$+46$

-2

$X - 48$

$+96$

$+0$

$+96$

$X - 48$

768

384

-4608

-4608

$+3900$

-708

$X - 48$

5664

2832

$+33984$

-33984

0

Also ist — 48 eine Wurzel.

Beyspiel III.

Zu untersuchen, ob die Gleichung: $x^3 + (15 - 5m)x^2 - (75m + 6m^2)x - 90m^2 = 0$ rationale Wurzeln habe. —

Die Factoren des letzten Gliedes sind:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90,

m, 2m, 3m, 5m, ...

m^2, $2m^2$, $3m^2$, $5m^2$, ...

Setzt man im Ausdrucke der Gleichung statt x einen der von m unabhängigen Factoren, so bleibt nur das erste Glied x^3, und der Theil $+ 15x^2$ des zweyten Gliedes von m unabhängig. Wenn sich nun durch die Substitution eines von den genannten Factoren alle übrigen Theile der Gleichung gegen einander aufheben, so kann derselbe doch keine Wurzel seyn, wenn nicht dadurch auch $x^3 + 15x^2$, und also $x + 15 = 0$ wird; mithin kann von den Factoren 1, 2, 3, 5, ... 90 nur — 15 eine Wurzel seyn. Die Prüfung mit dieser Zahl gibt:

$$x = -15$$
$$+15 - 5m$$
$$-5m$$
$$X - 15$$
$$+75m$$
$$-75m - 6m^2$$
$$-6m^2$$
$$X - 15$$
$$+90m^2$$
$$-90m^2$$
$$0$$

Also ist — 15 wirklich eine Wurzel. Die beyden übrigen Wurzeln findet man: $x = +6m$ und $x = -m$.

C) Von der Bestimmung der irrationalen Wurzeln durch Näherung.

§. 68.

Wenn kein Factor des letzten Gliedes den Ausdruck einer Gleichung, deren Glieder ganze Zahlen als Coefficienten haben, auf Null bringt, so hat dieselbe keine rationalen Wurzeln (§. 41, 45.); allein bey der Prüfung der Factoren findet man verschiedene Werthe des Ausdruckes der Gleichung.

Erhält man dadurch ein Paar Werthe, welche entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt zwischen denselben wenigstens Eine Wurzel (§. 47.), und man nennt die beyden für die unbekannte Größe gesetzten Zahlen, welche solche Werthe hervorbringen, Grenzen oder Schranken der dazwischen fallenden Wurzeln.

So erhält z B. der Ausdruck der Gleichung: $x^3 - 10x^2 - 57x + 345 = 0$ die Werthe + 111 und — 65, wenn man + 3 und + 5 statt x setzt; daher sind + 3 und + 5 Grenzen von wenigstens Einer Wurzel dieser Gleichung.

§. 69.

Hat man zwey Grenzen einer Wurzel gefunden, so lassen sich dann andere angeben, deren Unterschied kleiner ist, als der

Unterschied der gefundenen, und welche also auch von einer Wurzel weniger unterschieden sind.

Man erhält sie dadurch, daß man die ganzen Zahlen, welche zwischen den beyden gefundenen Grenzen liegen, statt der unbekannten Größe substituirt; aus den Werthen des Ausdruckes der Gleichung ergibt sich sodann, welche von diesen Zahlen die nächsten Grenzen einer Wurzel sind. Auch sieht man ein, daß man auf diese Art allezeit zwey Grenzen erhalten müsse, welche nur um eine Einheit unterschieden sind.

Z. B. In der Gleichung $x^3 - 10x^2 - 57x + 345 = 0$ fällt zwischen die beyden Grenzen $+3$ und $+5$ (§. 68.) nur noch die ganze Zahl $+4$, und $x = +4$ angenommen, gibt dem Ausdrucke der Gleichung den Werth $+21$; also sind $+4$ und $+5$ die nächsten Grenzen einer Wurzel in ganzen Zahlen, d. h. eine Wurzel dieser Gleichung ist > 4 und < 5.

§. 70.

Es sey $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + ix + k$ die gegebene Gleichung, und w diejenige von den beyden nächsten Grenzen, welche den Ausdruck der Gleichung der Null näher bringt, f aber der Unterschied zwischen dieser Grenze und einer Wurzel, so ist $f < 1$, und wahrscheinlich auch $f < \frac{1}{2}$.

Setzt man nun $x = w + f$, so wird (§. 10.)

$$x^m = w^m + m w^{m-1} f + \frac{m(m-1)}{1.2} w^{m-2} f^2 + \ldots$$

$$+ a x^{m-1} = + a w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} f + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} a w^{m-3} f^2 + \ldots$$

$$+ b x^{m-2} = + b w^{m-2} + (m-2) b w^{m-3} f + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} b w^{m-4} f^2 + \ldots$$

$$+ \ldots = + \ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots$$

$$+ ix = + iw + if$$

$$+ k = + k$$

und man hätte eine Wurzel, wenn ein solcher Werth von f bekannt wäre, daß dadurch der für die Gleichung so eben gefundene Ausdruck $= 0$ würde; allein um einen solchen Werth von f

zu finden, hat man eine Gleichung vom nämlichen Grade aufzulösen, von welchem die gegebene ist, weil das letzte Glied der mten Potenz von x oder $w + f$, $= f^m$ seyn muß (§. 11.).

Da aber f immer ein ächter Bruch ist, so werden diejenigen Glieder dieses Ausdruckes, welche f^2, f^3, und noch höhere Potenzen von f als Factoren enthalten, im Verhältnisse zu denjenigen, welche von f unabhängig sind, und zu denen, welche die erste Potenz von f enthalten, meistens unbeträchtlich, und dieses desto mehr, je kleiner f ist. Daher wird man f noch ziemlich genau finden, wenn man mit Weglassung der übrigen Glieder, $w^m + a w^{m-1} + b w^{m-2} + \ldots + i w + k + [m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + (m-2) b w^{m-3} + \ldots + i] f = o$ setzt, und daraus $f = -\frac{w^m + a w^{m-1} + b w^{m-2} + \ldots + i w + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + \ldots + i}$ nimmt; es wird also $w - \frac{w^m + a w^{m-1} + b w^{m-2} + \ldots + i w + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + \ldots + i}$ von einer Wurzel weniger unterschieden seyn, als w.

§. 71.

Heißt der zuletzt gefundene Näherungswerth ω und der Unterschied zwischen ω und der Wurzel φ, so ist $\varphi < f$ und man findet wieder

$$\varphi = -\frac{\omega^m + a\omega^{m-1} + b\omega^{m-2} + \ldots + i\omega + k}{m\omega^{m-1} + (m-1) a\omega^{m-2} + \ldots + i}$$ beynahe, und zwar um Vieles genauer als zuvor f, weil wegen $\varphi < f$ auch $\varphi^2 < f^2$, $\varphi^3 < f^3$, &c. ist.

§. 72.

Aus diesem folgt, daß man aus einem bekannten Näherungswerthe w einer Wurzel der Gleichung $x^m + a x^{m-1} + \ldots + i x + k = o$, welcher von der Wurzel um keine ganze Einheit mehr unterschieden ist, einen genauern erhalte, wenn man $x = w - \frac{w^m + a w^{m-1} + \ldots + i w + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + \ldots + i}$ nimmt; daß man dann einen noch genauern finde, wenn man durch w in der angeführten For-

mel den so eben gefundenen bezeichnet, und daß man also durch Fortsetzung dieses Verfahrens dem Werthe einer irrationalen Wurzel beliebig nahe kommen könne.

§. 73.

Der Bruch $\frac{w^m + a w^{m-1} + b w^{m-2} + \ldots + i w + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + \ldots + i}$, (und mithin auch der genauere Näherungswerth) läßt sich in jedem vorkommenden Falle leicht bilden; denn der Herleitung desselben zu Folge (§. 70.) erhält man den Zähler bloß dadurch, daß man im Ausdrucke der Gleichung, w statt x schreibt; den Nenner aber findet man aus dem Zähler, wenn man jedes Glied des Zählers mit dem Exponenten der vorkommenden Potenz von w multiplicirt, und den Exponenten selbst um 1 vermindert, wodurch das letzte Glied k verschwindet, weil $k = k\, w^0$ ist, (woraus nach der gegebenen Regel o. k. $w^{-1} = o$ wird,) und das vorletzte i w den Werth seines Coefficienten erhält, weil 1. i $w^0 = i$ ist.

§. 74.

Bey der Berechnung dieses Bruches zeigt zugleich der Zähler an, wie nahe der Ausdruck der Gleichung durch den vorhergehenden Näherungswerth w auf Null gebracht werde.

Da man immer genauere Näherungswerthe der Wurzel findet, so muß man nach und nach immer kleinere Werthe für diesen Zähler erhalten; sollte es sich daher ereignen, daß der Zähler wieder größer würde, so wäre dieses ein sicheres Zeichen, daß entweder bey der Berechnung dieses Zählers selbst, oder bey der Berechnung des vorhergehenden Werthes dieses Bruches ein Rechnungsfehler gemacht worden sey.

§. 75.

Es ist am bequemsten, die Näherungswerthe durch Decimal-Brüche anzugeben; vom Bruche $\frac{w^m + a w^{m-1} + \ldots + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} .. + i}$ werden aber dann nur einige der ersten Decimal-Stellen mit dem Werthe der Wurzel übereinkommen, und man erhält meistentheils diese

richtigen Decimal-Stellen, wenn man vom Zähler des Decimal-Bruches eben so viele Ziffern nimmt, als derselbe zwischen der Einerstelle und der höchsten Ziffer des Zählers Nullen hat. Wie weit diese Regel zuverläßig sey, zeigt Kästner in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen 321. bey der Anwendung eines ähnlichen Verfahrens.

Von der Genauigkeit eines Näherungswerthes wird man aber immer durch die Berechnung des Bruches überzeugt, welcher zur Bestimmung des nächstfolgenden Näherungswerthes dient: so viele Nullen nämlich dieser Bruch in den nach der Stelle der Einer befindlichen Decimal-Stellen enthält, so viele Decimal-Stellen des bereits gefundenen Näherungswerthes sind richtig.

Anfänglich bezeichnet w nur eine ganze Zahl, und dann ist $\frac{w^m + a w^{m-1} + \ldots + k}{m w^{m-1} + (m-1) a w^{m-2} + \ldots + i}$ in Hinsicht auf die Wurzel am wenigsten genau; man kann sich also begnügen, von diesem Bruche nur die Zehntheile beyzubehalten.

Auch trägt zur Erleichterung der Rechnung, ohne der Genauigkeit derselben nachtheilig zu seyn, nachdem man schon ein Paar Decimal-Stellen der Wurzel gefunden hat, die Anwendung der abgekürzten Multiplication und Division mit Decimal-Brüchen sehr viel bey.

Beyspiel.

Bey der Gleichung $x^3 - 10 x^2 - 57 x + 345 = 0$ findet man für jeden Näherungswerth w den genauern: $x = w - \frac{w^3 - 10 w^2 - 57 w + 345}{3 w^2 - 20 w - 57}$ (§. 73. u. 70.), und es sind die nächsten Grenzen einer Wurzel in ganzen Zahlen: + 4 und + 5 (§. 69.).

Da der Ausdruck der Gleichung den Werth + 21 erhält, wenn man $x = + 4$, hingegen — 65, wenn man $x = + 5$ setzt, also derselbe durch + 4 der Null näher gebracht wird, so setze man erstlich $w = + 4$ (§. 70.); dieses gibt $w^3 - 10 w^2 - 57 w + 345 = + 21$ und $3 w^2 - 20 w - 57 = 48 - 80 - 57 = 48 - 137 = - 89$; also $x = 4 - \frac{21}{-89} = 4 + \frac{21}{89} = 4,2$.

Nimmt man nun w = 4,2, so ist die fernere Rechnung folgende:

w = 4,2	3 w = 12,6
— 10	— 20
— 5,8	— 7,4
X 4,2	X 4,2
116	148
232	296
— 24,36	— 31,08
+ 57	— 57
— 81,36	— 88,08
X 4,2	
16272	
32544	
— 341,712	

+ 345	— 88,08
+ 3,288	+ 0,037 . . . =
2642	+ 0,04 beynahe;
646	+ 4,2
616	+ 4,24 = x
30	

Dann gibt w = 4,24 3 w = 12,72

— 10	— 20
— 5,76	— 7,28
X 4,24	X 4,24
23,04	29,12
115	146
23	29
— 24,42	— 30,87
— 57	— 57
— 81,42	— 87,87
X 4,24	
325,68	— 0,22000
1628	17574
326	4426
— 345,22	4394
+ 345	32
— 0,22	

— 87,87	
— 0,0025	
+ 4,24	
+ 4,2375 = x	

Ferner wird aus

$w = 4{,}2375$	$-81{,}4186$	$3w = 12{,}7125$
-10	$\times\ 4{,}2375$	-20
$-5{,}7625$	$325{,}6744$	$-7{,}2875$
$\times\ 4{,}2375$	$16\,2837$	$\times\ 4{,}2375$
$23{,}0500$	$2\,4425$	$29{,}1500$
$1\,1525$	5699	14575
1729	407	2186
403	$-345{,}0112$	510
29	$+345$	36
$-24{,}4186$	$-0{,}0112$	$-30{,}8807$
-57		-57
$-81{,}4186$		$-87{,}8807$

$-0{,}01120000$	$-87{,}8807$
878807	$-0{,}000127$
241193	$+4{,}2375$
175761	$+4{,}237373 = x$
65432	
61516	
3916	

Die Vergleichung der beyden letzten Näherungswerthe 4,2375 und 4,237373 zeigt nun, daß der erste um weniger als 0,0002 von der Wurzel unterschieden seyn müsse, und daß $x = 4{,}2375$ angenommen, den Ausdruck der Gleichung so nahe auf Null bringe, daß nur noch 0,0112 . . . daran fehle.

Würde man mit der Rechnung dadurch fortfahren, daß man nunmehr $w = 4{,}237373$ setzte, so würde man einen noch genauern Näherungswerth erhalten, und zugleich erfahren, wie nahe der Ausdruck der Gleichung durch 4,237373 dem Werthe Null gebracht werde, und wie viele Decimalstellen in 4,237373 bestimmt richtig seyen.

Wenn in der nämlichen Gleichung statt x die Factoren des letzten Gliedes, — 5 und — 15 gesetzt werden, so geben sie dem Ausdrucke der Gleichung die Werthe + 255 und — 4425; also

liegt eine Wurzel zwischen — 5 und — 15, und sie muß von — 5 weniger unterschieden seyn, als von — 15.

$x = -6$ gibt nun + 111, und $x = -7$ gibt — 89; also sind — 6 und — 7 die nächsten Grenzen dieser Wurzel. Weil aber — 89 weniger von Null unterschieden ist, als + 111, so setze man $w = -7$; dann hat man schon vom Bruche $\frac{w^3 - 10w^2 - 57w + 345}{3w^2 - 20w - 57}$ den Zähler $= -89$; den Nenner und weitere Näherungswerthe gibt folgende Rechnung:

$3w = -21$
-20
-41
$X - 7$
$+287$
-57
$+230$

$-89 \mid +23$
$-8{,}9 \mid +0{,}3\ldots =$
$69 \mid +0{,}4$ beynahe,
$20 \mid -7$
$-6{,}6 = x$

$w = -6{,}6$
-10
$-16{,}6$
$X - 6{,}6$
996
996
$+109{,}56$
-57
$+52{,}56$
$X - 6{,}6$
31536
31536
$-346{,}896$

$3w = -19{,}8$
-20
$-39{,}8$
$X - 6{,}6$
2388
2388
$+262{,}68$
-57
$+205{,}68$

$+345 \mid +205{,}68$
$-18{,}96 \mid +0{,}009\ldots =$
$1851 \mid +0{,}01$ beynahe,
$45 \mid -6{,}6$
$-6{,}59 = x$

$$w = -6,59$$
$$-10$$
$$-16,59$$
$$X\ -6,59$$
$$99,54$$
$$830$$
$$149$$
$$+109,33$$
$$-57$$
$$+52,33$$
$$X -6,59$$
$$313,98$$
$$2617$$
$$471$$
$$-344,86$$
$$+345$$
$$+0,14$$

$$3w = -19,77$$
$$-20$$
$$-39,77$$
$$X -6,59$$
$$238,62$$
$$1989$$
$$357$$
$$+262,08$$
$$-57$$
$$+205,08$$

	$+205,08$
$+0,140000$	$-0,000682... =$
123048	$-0,000683$ zunächst;
16952	$-6,59$
16406	$-6,590683 = x$
546	
410	
136	

Die dritte Wurzel dieser Gleichung ist nun nach §. 43. $= +10 - (4,237... - 6,590...) = +10 + 2,353... = +12,353....$

§. 76.

Wenn das letzte Glied einer geordneten Gleichung nur wenige Factoren hat, oder wenn man durch die Anwendung der §. 66. angegebenen Methode findet, daß nur wenige Factoren des letzten Gliedes Wurzeln seyn können, so kann es sich treffen, daß bey der Prüfung dieser Factoren der Ausdruck der Gleichung durch dieselben beständig entweder positive oder negative Werthe erhält, wodurch man also keine Grenzen von Wurzeln (§. 68.) findet, deren man jedoch zur Berechnung der allenfalls vorhandenen irrationalen Wurzeln bedarf.

In diesem Falle setze man statt der unbekannten Größe der Ordnung nach $0, +1, +2, +3, +...$, wenn keine Wurzel negativ, $0, -1, -2, -3, -...$, wenn keine Wurzel positiv seyn kann (§. 46.), außer diesem aber sowohl $0, +1, +2, +3, +...$,

als auch — 1, — 2, — 3, — ... bis das Zeichen in den Werthen des Ausdruckes der Gleichung sich ändert; dann hat man zugleich zwey nächste Grenzen in ganzen Zahlen (§. 69.).

Oft lassen sich auch ohne viele Mühe die Grenzen angeben, zwischen welche alle Wurzeln der Gleichung fallen. So findet man z. B. bey der Gleichung

$x^3 - 5x^2 - 10x + 7 = 0$, wenn man dem Ausdrucke derselben folgende Form gibt:

$x^2 (x - 5) - 10 (x - \frac{7}{10}) = x^2 (x - 5) - 10 (x - 5 + \frac{43}{10})$

$= (x^2 - 10)(x - 5) - 43$, daß $(x^2 - 10)(x - 5)$ immer positiv werde, wenn man x positiv und > 5 annimmt, und daß dann die Werthe dieses Productes mit den Werthen von x beständig zunehmen. Nun wird $(x^2 - 10)(x - 5) - 43 = + 35$, wenn man $x = 7$ setzt; also hat die Gleichung keine Wurzel, welche $> + 7$ ist.

Ferner wird $x^2 - 10$ positiv, wenn man für x die Zahl $- 4$, oder eine größere negative Zahl setzt; daher bleibt bey solchen Werthen von x der Ausdruck der Gleichung immer negativ; mithin kann kein solcher negativer Werth von x eine Wurzel seyn. Alle Wurzeln dieser Gleichung sind daher zwischen den Grenzen — 4 und + 7 enthalten.

§. 77.

Es trifft sich zuweilen, daß, wenn man der unbekannten Größe immer größere Werthe gibt, die Werthe des Ausdruckes der Gleichung abnehmen, dann aber wieder zunehmen, ohne ihr Zeichen geändert zu haben. So erhält z. B. der Ausdruck der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 42x^2 - 108x + 1786 = 0$, wenn man $x = + 5, + 6, + 7, + 8, + 9$ setzt, der Ordnung nach die Werthe + 321, + 58, + 1, + 282, + 1057.

In einem solchen Falle hat die Gleichung öfters Wurzeln, welche um keine Einheit von demjenigen Werthe der unbekannten Größe unterschieden sind, durch welchen der Ausdruck der Gleichung seinen kleinsten Werth erhielt. Die angegebene Glei-

chung kann also Wurzeln haben, welche um keine Einheit von +7 unterschieden sind.

Um zu untersuchen, ob eine Wurzel zwischen 7 und 8, oder auch zwischen 7 und 6 falle, kann man $x = 7,5$, und auch $x = 6,5$ setzen. Der erstere Werth gibt $+90,06..$, und der zweyte $-3,9...$; woraus geschlossen werden kann, daß zwischen 7 und 8 keine, aber zwischen 7 und 6 zwey Wurzeln enthalten seyen; nämlich Eine zwischen 6 und 6, 5, und die andere zwischen 6,5 und 7 (§. 47.). Zur Bestimmung genauerer Näherungswerthe dient die Formel

$$w - \frac{w^4 - 4w^3 - 42w^2 - 108w + 1786}{4w^3 - 12w^2 - 84w - 108}$$ (§. 73.), und man kann für die zwischen 6 und 6,5 fallende Wurzel zuerst $w = 6$, für die andere aber $w = 7$ setzen, wodurch man dieselben $= 6,44...$ und $= 6,99..$ findet.

§. 78.

Wenn die Werthe des Ausdruckes einer Gleichung, ohne jemals ihr Zeichen zu ändern, ununterbrochen zunehmen, sobald man statt der unbekannten Größe sowohl zunehmende positive, als auch zunehmende negative Werthe setzt; oder wenn bey dem im vorigen §. angeführten Falle der Ausdruck der Gleichung durch gebrochene Werthe der unbekannten Größe der Null nicht beliebig nahe gebracht werden kann, so zeigt dieses, daß die Gleichung lauter unmögliche Wurzeln habe.

Sind alle Wurzeln einer Gleichung möglich, und ist jede derselben, ohne auf ihr Zeichen zu sehen, größer als eine gewisse Zahl g, so ist auch ihr Product, und mithin das letzte Glied k der Gleichung größer als g^n, wenn n den Grad der Gleichung bezeichnet; eine Gleichung, bey welcher sich $k < g^n$ findet, muß daher unmögliche Wurzeln haben. Z. B. in der Gleichung $x^3 + 18x^2 - 5x + 3 = 0$ findet man, daß keine Wurzel $= \underline{\underline{+}} 2$ oder $< \underline{+} 2$ sey, und es ist ihr letztes Glied $3 < 2^3$; also hat diese Gleichung unmögliche Wurzeln.

V. Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

§. 79.

Um aus zwey Gleichungen mit zwey unbekannten Größen x, y, die letztern zu finden, bilde man eine dritte Gleichung, welche nur noch Eine unbekannte Größe, z. B. x enthält (§. 25.), so findet man aus dieser Gleichung (§. 56. — 78.) die verschiedenen bestimmten Werthe, welche der unbekannten Größe x zukommen können. Da man aber bey der Wegschaffung von y auf eine Gleichung kömmt, welche in Beziehung auf y einfach ist (§. 25.), so bekömmt man durch die Substitution der für x gefundenen Werthe in derselben die zugehörigen Werthe von y.

Beyspiel.

Die beyden Gleichungen §. 25. Beysp. II. aufzulösen. —

Die Wegschaffung von y gibt die Gleichung F daselbst, aus welcher, wenn man sie ordnet (§. 22.), $x^9 + 4x^6 + \frac{40}{9}x^3 + \frac{16}{27} = 0$ wird. Weil in dieser Gleichung die Exponenten aller Potenzen von x durch 3 theilbar sind, so reducirt sich ihre Auflösung auf die einer cubischen (§. 55.), zu welchem Zwecke $x = z^{\frac{1}{3}}$ gesetzt werden muß, wodurch man $z^3 + 4z^2 + \frac{40}{9}z + \frac{16}{27} = 0$ erhält.

Will man die Auflösung nach §. 63. vornehmen, so setze man, um das zweyte Glied wegzuschaffen, $z = v - \frac{4}{3}$ (§. 53.), und man bekömmt $v^3 - \frac{8}{9}v - \frac{16}{27} = 0$.

Also ist $f = \frac{8}{9}$ und $g = \frac{16}{27}$; daher $(\frac{1}{3}f)^3 = \frac{2^9}{3^9}$, $(\frac{1}{2}g)^2 = \frac{2^6}{3^6}$, und $\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2 - (\frac{1}{3}f)^3} = \frac{2^3}{3^4}\sqrt{\frac{19}{3}}$; folglich die mögliche Wurzel der Gleichung, $v = \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}}\right) = 1{,}179528$; daraus folgt $z = 1{,}179528 - \frac{4}{3} = -0{,}153805$, und $x = \sqrt[3]{-0{,}153805} = -0{,}535785$.

Dann hat man auch $y = \frac{3x^4 + 4x}{4}$ (§. 25. Beysp. II.) =

$x\,(\frac{3}{4}x^3 + 1) = -\,0{,}535785\,(1 - \frac{3}{4} \times 0{,}153805) = -\,0{,}473980.$

§. 80.

Um mehr als zwey Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Größen aufzulösen, bilde man aus denselben eine einzige mit Einer unbekannten Größe (§. 27.), und suche daraus die Werthe der letztern.

Die zugehörigen Werthe der übrigen unbekannten Größen ergeben sich dann aus den Gleichungen, welche aus den gegebenen zu dem Zwecke abgeleitet wurden, alle unbekannten Größen bis auf eine Einzige wegzuschaffen; so wie man §. 25. Beysp. I. u. II. aus E, y findet, wenn x bekannt ist.

VI. Abschnitt.

Anwendung auf die Zerlegung der zusammengesetzten Größen in Factoren.

§. 81.

Die Auflösung höherer Gleichungen dienet auch zur Findung der zusammengesetzten Factoren mehrtheiliger Größen.

Wenn nämlich im Ausdrucke einer solchen Größe A, Potenzen einer andern α mit ganzen positiven Exponenten vorkommen, so läßt sich A als ein Product von Factoren, welche in Beziehung auf α einfach sind (§. 36.), auf folgende Art darstellen:

Man betrachte A als den Ausdruck einer auf Null reducirten Gleichung, in welchem α die unbekannte Größe ist, ordne sie, und suche deren Wurzeln.

Aus diesen ergeben sich die einfachen Factoren des geordneten Ausdruckes der Gleichung (§. 40.), und daraus die Factoren von A.

Beyspiel I.

Die Größe $10m^2 + 2\alpha m^2 + 25\alpha m + 5\alpha^2 m - 15\alpha^2 - 3\alpha^3$ in Beziehung auf α in Factoren zu zerlegen. —

Es sey $10m^2 + 2\alpha m^2 + 25\alpha m + 25\alpha^2 m - 3\alpha^3 = A$, so ist des Ordnens wegen,

$$-\frac{A}{3} = \alpha^3 + \frac{(15-5m)}{3}\alpha^2 - \frac{(25m+2m^2)}{3}\alpha - \frac{10}{3}m^2.$$

Man setze nun

$$\alpha^3 + \frac{(15-5m)}{3}\alpha^2 - \frac{(25m+2m^2)}{3}\alpha - \frac{10}{3}m^2 = 0,$$ und schaffe, um die rationalen Wurzeln finden zu können, die Nenner der Brüche weg (§. 51.).

Dadurch erhält man folgende Gleichung:

$x^3 + (15 - 5m)x^2 - (75m + 6m^2)x - 90m^2 = 0$, wobey $x = 3\alpha$ ist, und deren Wurzeln: $-15, +6m, -m$ sind (§. 67. Beysp. III.). Also sind die Wurzeln der vorhergehenden: $-5, +2m, -\frac{1}{3}m$, und ihr Ausdruck ist das Product der Factoren: $\alpha + 5, \alpha - 2m$ und $\alpha + \frac{1}{3}m$; nämlich es ist $-\frac{A}{3} = (\alpha+5)(\alpha - 2m)(\alpha + \frac{1}{3}m)$, folglich A oder $10m^2 + 2\alpha m^2 + 25\alpha m + 5\alpha^2 m - 15\alpha^2 - 3\alpha^3 =$
$-3(\alpha+5)(\alpha-2m)(\alpha+\frac{1}{3}m) = -(\alpha+5)(\alpha-2m)(3\alpha+m) =$
$(5+\alpha)(2m-\alpha)(m+3\alpha)$.

Beyspiel II.

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ in Factoren zu zerlegen. —

Weil im gegebenen Ausdrucke: $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = A$ jede von den Größen a, b, c auf eben dieselbe Art mit den übrigen verbunden ist, so ist es gleichgeltend, welche man zur Bestimmung der Factoren als unbekannte Größe betrachten will.

Nimmt man a, so bekömmt man

$-A = a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$.

Die Gleichung $a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) = 0$ wird nun nach §. 55., wenn man $a^2 = x$ setzt, in die quadratische; $x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) = 0$ verwandelt, deren Wurzeln

$= (b^2 + c^2) \pm \sqrt{(b^2+c^2)^2 - (b^4 - 2b^2c^2 + c^4)} = b^2 + c^2 \pm \sqrt{4b^2c^2} = b^2 + c^2 \pm 2bc$ sind (§. 56.).

Also ist $a^2 = b^2 \pm 2bc + c^2$, und aus

$a^2 = b^2 + 2bc + c^2$ folgt $a = \pm\sqrt{b^2+2bc+c^2}$,

nämlich $a = +(b+c)$

und $a = -(b+c)$;

aus $a^2 = b^2 - 2bc + c^2$ aber $a = \pm\sqrt{b^2-2bc+c^2}$,

nämlich $a = +(b-c)$

und $a = -(b-c)$.

Daher ist $-A = (a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ und folglich A oder $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = -(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Beyspiel III.

Die Factoren von $a^3 - b$ zu finden. —

Weil $a^3 - b = o$ in Beziehung auf a schon geordnet ist, so folgt unmittelbar daraus $a = \sqrt[3]{b}$, und die beyden übrigen Wurzeln sind unmöglich (§. 57.); $a^3 - b$ hat also nur die beyden möglichen Factoren: $a - \sqrt[3]{b}$ und $(a^3-b):(a-\sqrt[3]{b}) = a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$, nämlich $a^3 - b = (a-\sqrt[3]{b})(a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$.

§. 82.

Führt die gegebene Größe auf eine Gleichung, deren letztes Glied selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so muß das bisherige Verfahren zuerst dazu angewendet werden, die Factoren des letzten Gliedes zu erhalten, wenn man anfänglich untersuchen will, ob die Gleichung rationale Wurzeln habe.

Beyspiel.

Die Größe $A = 2a^2(x^2 - 3x - 18) + 3a(x^3 - 4x^2 - 15x + 18) + x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 24x + 36$ in Beziehung auf x in Factoren zu zerlegen. —

Anmerkung. Zur Uebung sind alle zur Auflösung erforderlichen Rechnungs-Operationen vollständig angegeben. —

Man erhält, wenn man nach x ordnet,

$$A = x^4 - 4 \left\{ \begin{matrix} x^3 - 17 \\ + 3a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x^2 + 24 \\ - 12a \\ + 2a^2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x + 36 \\ - 45a \\ - 6a^2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} + 54a \\ - 36a^2 \end{matrix} \right.$$

und der Gleichung $A = o$ letztes Glied ist

$36 + 54a - 36a^2 = K.$

Um die Factoren desselben zu finden, erhält man (§. 81.)

$-\frac{K}{36} = a^2 - \frac{3}{2}a - 1$, und aus $a^2 - \frac{3}{2}a - 1 = o$ folgt $a = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$ (§. 56.): also ist $a^2 - \frac{3}{2}a - 1$ das Product der Factoren $a - 2$ und $a + \frac{1}{2}$, folglich $K = -36(a-2) \times (a + \frac{1}{2})$.

Da in der Gleichung A kein Coefficient eines Gliedes die Form eines Bruches hat, daher auch keine Wurzel diese Form haben kann (§. 45.), so nehme man $K = -18 . 2(a-2)(a+\frac{1}{2}) = -18(a-2)(2a+1)$, welches die einfachen und zusammengesetzten Factoren gibt:

1, 2, 3, 6, 9, 18;
$(a-2)$, $2(a-2)$, $3(a-2)$, ...
$(2a+1)$, $2(2a+1)$, $3(2a+1)$, ...
$(a-2)(2a+1)$, $2(a-2)(2a+1)$.....

Wollte man, wie §. 67. Beysp. III. untersuchen, welche aus den von a unabhängigen Factoren des letzten Gliedes K keine Wurzeln der Gleichung $A = o$ seyn können, so hätte man zu diesem Zwecke die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 24x + 36 = o$ aufzulösen, weil nur die in dieser Gleichung vorkommenden Glieder von a unabhängig bleiben, wenn man einen von den Factoren: 1, 2, 3, 6, 9, 18 statt x setzt, und also zusammen genommen Null geben müssen, wenn $A = o$ seyn soll.

Man setze deßhalb in der Gleichung $A = o$ sogleich statt x der Ordnung nach die Factoren: $+1, +2, +3$ ꝛc., so gibt (§. 67.)

$x = +1$

$-4+3a$

$-17-12a+2a^2$

$+24-45a-6a^2$

$+36+54a-36a^2$

$+40-40a^2$

$x = +2$

$-4+3a$

$-2+3a$

$\times 2$

$-4+6a$

$-17-12a+2a^2$

$-21-6a+2a^2$

$\times 2$

$-42-12a+4a^2$

$+24-45a-6a^2$

$-18-57a-2a^2$

$\times 2$

$-36-114a-4a^2$

$+36+54a-36a^2$

$-60-40a^2$

$x = +3$

$-4+3a$

$-1+3a$

$\times 3$

$-3+9a$

$-17-12a+2a^2$

$-20-3a+2a^2$

$\times 3$

$-60-9a+6a^2$

$+24-45a-6a^2$

$-36-54a$

$\times 3$

$-108-162a$

$+36+54a-36a^2$

$-72-108a-36a^2$

$x = +6$

$-4+3a$

$+2+3a$

$\times 6$

$-17-12a+2a^2$

$-5+6a+2a^2$

$\times 6$

$-30+36a+12a^2$

$+24-45a-6a^2$

$-6-9a+6a^2$

$\times 6$

$-36-54a+36a^2$

$+36+54a-36a^2$

0

Also ist $+6$ eine Wurzel, und man findet auf folgende Weise den Quotienten $A : (x-6)$;

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 4 \\
+ 3a
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^3 - 17 \\
- 12a \\
+ 2a^3
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^2 + 24 \\
- 45a \\
- 6a^2
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x + 36 \\
+ 54a \\
- 36a^2
\end{array}
\Big|
\begin{array}{l}
x - 6 \\
\hline
x^3 + 2 \\
+ 3a
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^2 \\
\\
\\
\hline
-5 \\
+ 6a \\
+ 2a^2
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x - 6 \\
- 9a \\
+ 6a^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mp 6\ x^3 \\
\hline
+ 2 \\
+ 3a
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^3 \\
\\
\\
\hline
\mp 12 \\
\mp 18a
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^2 \\
\\
\\
\hline
- 5 \\
+ 6a \\
+ 2a^2
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x^2 \\
\\
\\
\hline
\pm 30 \\
\mp 36a \\
\mp 12a^2
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x \\
\\
\\
\hline
- 6 \\
- 9a \\
+ 6a^2
\end{array}
\Big\}
\begin{array}{l}
x \pm 36 \\
\mp 54\ a \\
\mp 36\ a^2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$= A : (x-6) = B$

Anmerkung. Bey dieser Division ist das Anschreiben der Producte aus den Theilen des Quotienten mit dem ersten Theile des Divisors unterlassen worden, weil sich ein in Bestimmung eines Theiles des Quotienten etwa begangener Fehler doch dadurch aufdecken würde, daß am Ende der Operation ein Rest bliebe.

Da der gefundene Quotient B der Ausdruck einer cubischen Gleichung ist, welche die Wurzeln der Gleichung $A = 0$ mit Ausnahme der Wurzel $+6$ enthält (§. 40.), so ist ihr letztes Glied das Product der Factoren von K mit Ausnahme des Factors 6; also sind $1, 3, a-2, 2a+1$, und die aus diesen Zahlen gebildeten Producte die Factoren von $-6-9a+6a^2$.

Nun waren $+1$ und $+3$ keine Wurzeln der Gleichung $A = 0$; folglich sind diese Zahlen positiv genommen auch keine Wurzeln von $B = 0$.

Man setze also $x = -1$ und $x = -3$, so gibt

$x = -1$

$+2+3a$

$+1+3a$

$X - 1$

$-1-3a$

$-5+6a+2a^2$

$-6+3a+2a^2$

$\times -1$

$+6-3a-2a^2$

$-6-9a+6a^2$

$-12a+4a^2$

$x = -3$

$+2+3a$

$-1+3a$

$X - 3$

$+3-9a$

$-5+6a+2a^2$

$-2-3a+2a^2$

$X - 3$

$+6+9a-6a^2$

$-6-9a+6a^2$

0

Mithin ist -3 eine Wurzel, und

$x + 3$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 2 \\ +3a \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} -5 \\ +6a \\ +2a^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} -6 \\ -9a \\ +6a^2 \end{array}\right| \overline{\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 \\ +3a \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} -2 \\ -3a \\ +2a^2 \end{array}\right.}$$

$\pm 3x^2$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \\ +3a \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} \mp 3 \\ \pm 9a \end{array}\right\} x$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 \\ -3a \\ +2a^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} \mp 6 \\ +9a \\ \pm 6a^2 \end{array}\right.$$

0

$= B : (x+3) = C$

Aus $C = 0$ folgen endlich die beyden übrigen Wurzeln,

$$x = \frac{1-3a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-3a}{2}\right)^2 + 2 + 3a - 2a^2} = \frac{1-3a \pm (3+a)}{2},$$

nämlich $x = 2 - a$, und $x = -1 - 2a$.

Es ist demnach A oder $2a^2(x^2 - 3x - 18) + 3a(x^3 - 4x^2 - 15x + 18) + x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 24x + 36$
$= (x-6)(x+3)(x+a-2)(x+2a+1)$.

§. 83.

Wenn die gegebene Größe auf eine Gleichung führt, welche

unmögliche Wurzeln hat, so sind auch eben so viele in Beziehung auf die als unbekannt angenommene Größe einfache Factoren unmöglich; allein da solche Wurzeln nur paarweise vorkommen können, und jedes Paar daraus abgeleiteter einfacher Factoren einen möglichen quadratischen Factor gibt (§. 44.), so ist jede zusammengesetzte Größe A, deren Glieder Potenzen einer andern Größe α enthalten, ein Product aus möglichen, in Beziehung auf α entweder einfachen oder quadratischen Factoren; nur ist man nicht immer in Stande, die letztern zu finden, weil sich nicht allezeit die Ausdrücke für die unmöglichen Wurzeln finden lassen, welche die Gleichung $A = o$ enthält.

III. Hauptstück.

Von den Functionen.

I. Abschnitt.

Von dem Begriffe und der Eintheilung der Functionen.

---

§. 84.

Wenn man von Größen, welche in irgend einer bestimmten Beziehung stehen, annimmt, daß einigen derselben verschiedene beliebige Werthe zukommen können, während andere die ihnen einmal beygelegten Werthe behalten; so heißen die erstern veränderliche, die letztern aber unveränderliche oder beständige Größen.

Betrachtet man ferner von den veränderlichen Größen Eine

als die durch die übrigen zu bestimmende, so heißt die erstere eine Function der übrigen veränderlichen Größen.

So sind Bogen, Sehne und Durchmesser eines Kreises Größen, welche in einer bestimmten Beziehung stehen; nimmt man nun den Durchmesser als eine beständige Größe, und die Sehne als eine veränderliche, so ist auch der Bogen veränderlich, und es heißt der Bogen eine Function der Sehne, wenn man denselben als eine durch die Sehne zu bestimmende Größe betrachtet; hingegen heißt die Sehne eine Function des Bogens, wenn dieselbe als eine durch den Bogen zu bestimmende Größe betrachtet wird.

Würde man aber die Sehne als unveränderlich, und den Durchmesser als veränderlich annehmen, so wäre der Bogen ebenfalls veränderlich, und dieser eine Function des Durchmessers, oder umgekehrt, jenachdem man den Durchmesser oder den Bogen als bestimmende Größe betrachten würde.

So ist auch im Producte einfacher Factoren (§. 36.), x als eine veränderliche Größe angenommen worden.

§. 85.

Veränderliche Größen und Functionen derselben sind nur in so fern ein Gegenstand der Arithmetik, als sie gemessene, mithin durch Zahlen ausgedrückte Größen sind; es können aber die Werthe veränderlicher, also unbestimmter Größen nicht durch Zahlen angegeben werden, welche mit Ziffern bezeichnet sind, denn Ziffern drücken nur bestimmte Zahlen aus. Auch bezeichnet man der Allgemeinheit wegen die beständigen Größen gewöhnlich mit Buchstaben, aber zur Unterscheidung die veränderlichen, wie in der Algebra die unbekannten Größen mit den Endesbuchstaben u, v, x, y, z des Alphabetes, und die beständigen, wie in der Algebra die bekannten mit den vorhergehenden Buchstaben.

§. 86.

Wenn die Beziehung zwischen veränderlichen und beständigen Größen durch eine Gleichung dergestalt angegeben ist, daß man

vorerst algebraische Operationen verrichten muß, um den Werth derjenigen veränderlichen Größe, die man als Function der übrigen betrachtet, durch die Werthe der übrigen veränderlichen, und der beständigen Größen ausgedrückt zu erhalten, so heißt die Function eine verwickelte; wenn aber unmittelbar gegeben ist, wie der Werth der Function aus den Werthen der veränderlichen und beständigen Größen zu finden ist, so nennt man die Function eine entwickelte.

Jeder Zahlenausdruck, welcher veränderliche Größen enthält, ist also eine entwickelte Function dieser veränderlichen Größen. Z. B. in der Gleichung $z - a = \frac{a^2 x}{xz + ay}$ ist z eine verwickelte Function von x und y; aus dieser Gleichung folgt aber $z = \frac{a}{2x}(x - y \pm \sqrt{5x^2 + 2xy + y^2})$ wodurch z als eine entwickelte Function von x und y dargestellt ist.

§. 87.

Eine unbestimmte entwickelte Function veränderlicher Größen x, y, ... bezeichnet man mit f (x, y, ...); es bezeichnet nämlich f (x, y, ...) eine Größe, welche durch die veränderlichen x, y, ... nebst beständigen Größen auf irgend eine Art bestimmt wird, ohne die Verbindung anzugeben, in welcher diese veränderlichen und beständigen Größen stehen. Wenn man aber von einander unterschiedene, unbestimmte Functionen eben derselben veränderlichen Größen x, y, ... bezeichnen will, so geschieht dieses durch die Bezeichnungen: f (x, y, ...), f^1 (x, y, ...), φ(x, y, ...) ꝛc.

§. 88.

Eine Function heißt in Beziehung auf eine veränderliche Größe algebraisch, wenn ihr für jeden Werth der letztern nur ein Werth, oder eine bestimmte Anzahl von Werthen zugehören, und wenn zugleich umgekehrt für Einen Werth der Function die veränderliche Größe nur Einen oder eine bestimmte

Anzahl von Werthen haben kann; im Gegentheile heißt sie transcendent.

So ist im Beyspiele des vorhergehenden §., z eine algebraische Function sowohl von x als von y, denn für jeden Werth von x und für jeden Werth von y kommen der Function zwey bestimmte Werthe zu, und zugleich kann x für jeden Werth von z und y, so wie auch y für jeden Werth von z und x nur Einen Werth haben, welches die Gleichung $z - a = \frac{a^2 x}{xz + ay}$ zeigt.

Allein ein Kreisbogen ist eine transcendente Function seines Sinus; denn wenn x der Sinus des Bogens z ist, und die Peripherie mit p bezeichnet wird, so ist x auch der Sinus der Bögen: $p + z$, $2p + z$, $3p + z$, ... $\frac{1}{2}p - z$, $\frac{3}{2}p - z$, $\frac{5}{2}p - z$, ...; also hat der Bogen für einen bestimmten Werth von x unbestimmt viele Werthe. Daraus folgt auch, daß der Sinus eine transcendente Function seines Bogens sey.

Eben so ist $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 +$ u. s. w. eine transcendente Function von x, weil diese Gleichung in Beziehung auf x eine Gleichung von einem unbestimmten Grade ist, mithin eine unbestimmte Anzahl Wurzeln hat, und weil daher x bey jedem einzelnen Werthe von y unbestimmt viele Werthe haben kann.

§. 89.

Eine algebraische Function nennt man in Beziehung auf eine veränderliche Größe einförmig oder vielförmig, jenachdem ihr für jeden Werth der veränderlichen Größe nur Ein Werth, oder mehrere Werthe zugehören. So ist $\frac{a + y}{b - y^2}$ eine entwickelte einförmige Function von y; in der Gleichung $ay^3 + 2x^2y^2 - 8b^2xy + 5x^4 = 0$ ist aber y eine verwickelte dreyförmige Function von x, und x eine verwickelte vierförmige Function von y (§. 39.).

§. 90.

Eine entwickelte Function heißt in Beziehung auf eine veränderliche Größe irrational, wenn ihr Ausdruck Irrational-

Größen enthält, welche von dieser veränderlichen Größe abhangen; außer dem heißt sie rational.

Ferner heißt eine solche Function gebrochen, wenn in ihrem Ausdrucke veränderliche Nenner vorkommen, wozu auch Potenzen der veränderlichen Größe mit negativen Exponenten gehören; im Gegentheile nennt man sie eine ganze Function.

$\frac{xy - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + x}$ ist also eine gebrochene rationale Function von x, und zugleich eine ganze irrationale Function von y; hingegen ist $\frac{a^{\frac{3}{2}} x^3 y^{-1} + x^2 y^{\frac{3}{2}}}{b}$ eine ganze rationale Function von x, und eine gebrochene irrationale Function von y.

§. 91.

Zwey entwickelte Functionen eben derselben veränderlichen Größe haben einerley Form, wenn sie so beschaffen sind, daß die eine Function mit der andern einerley würde, wenn man statt der beständigen Coefficienten der einen, in dieselbe die beständigen Coefficienten der andern setzen würde; z. B. die Functionen

$a + b x^{\alpha} + c x^{\beta} + d x^{\gamma} + \ldots$ und

$A + B x^{\alpha} + C x^{\beta} + D x^{\gamma} + \ldots$.

Eine Function einer veränderlichen Größe heißt aber einer Function einer andern veränderlichen Größe ähnlich, wenn beyde Functionen durch Gleichsetzung der veränderlichen Größen ebenfalls einerley würden. Z. B.

$a + b x^{\alpha} + c x^{\beta} + d x^{\gamma} + \ldots$ und

$a + b y^{\alpha} + c y^{\beta} + d y^{\gamma} + \ldots$.

II. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Functionen.

§. 92.

Wenn man eine Function von der Form $a + b x^{\delta} + c x^{2\delta} + d x^{3\delta} + \ldots$ mit einer andern von der nämlichen Form (§. 91.) multiplicirt, so wird das erste Glied des Productes beständig, und die folgenden Glieder enthalten Potenzen von x, welche der Ordnung nach die Zahlen: δ, 2δ, 3δ, $4\delta \ldots$ als Exponenten haben; also gibt das Product zweyer Functionen von der angegebenen Form eine Function, welche mit jedem der Factoren einerley Form hat.

Daraus folgt, daß auch jede Potenz einer solchen Function, deren Exponent eine ganze positive Zahl ist, mit ihr einerley Form habe.

§. 93.

Allein was für eine Zahl der Exponent m auch seyn mag, so hat $(a + b x^{\delta} + c x^{2\delta} + d x^{3\delta} + \ldots)^m$ mit $a + b x^{\delta} + c x^{2\delta} + d x^{3\delta} + \ldots$ einerley Form; denn wenn diese Potenz nach §. 13. entwickelt wird, so erhalten erstlich $(a + b x^{\delta})^m$, $(a + b x^{\delta})^{m-1}$, $(a + b x^{\delta})^{m-2}$ ꝛc. nur solche Potenzen von x, deren Exponenten der Ordnung nach: $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ sind (§. 3.). Dann ist

$$(a + b x^{\delta} + c x^{2\delta})^m = (a + b x^{\delta})^m + \frac{m}{1}(a + b x^{\delta})^{m-1} \cdot c x^{2\delta} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(a + b x^{\delta})^{m-2} \cdot c^2 x^{4\delta} + \ldots,$$

wo also wieder nur solche Potenzen von x vorkommen können. Auf eben dieselbe Art erhellet die Richtigkeit des Satzes für $(a + b x^{\delta} + c x^{2\delta} + d x^{3\delta})^m$ u. s. f.

§. 94.

Weil $\frac{A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+Dx^{3\delta}+\ldots}{a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+dx^{3\delta}+\ldots} = A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+\ldots) \times (a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+\ldots)^{-1}$ iſt, und $(a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+\ldots)^{-1}$ mit $a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+\ldots$ einerley Form hat (§. 93.) folglich $= \alpha+\beta x^{\delta}+\gamma x^{2\delta}+\ldots$ geſetzt werden kann, ſo iſt $\frac{A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+\ldots}{a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+\ldots} = (A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+\ldots) \times (\alpha+\beta x^{\delta}+\gamma x^{2\delta}+\ldots)$; allein dieſes Product gibt wieder eine Function von der Form $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^{\delta}+\mathfrak{C}x^{2\delta}+\mathfrak{D}x^{3\delta}+\ldots$ (§. 92.); alſo iſt $\frac{A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+\ldots}{a+bx^{\delta}+cx^{2\delta}+\ldots} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^{\delta}+\mathfrak{C}x^{2\delta}+\mathfrak{D}x^{3\delta}+\ldots$; d. h. wenn man eine Function von der Form $A+Bx^{\delta}+Cx^{2\delta}+\ldots$ durch eine Function von der nämlichen Form dividirt, ſo erhält dieſe Form auch der Quotient.

§. 95.

Wenn die Werthe zweyer Functionen, (welche einerley, und zwar eine ſolche Form haben, daß jede Function die Summe von Producten aus beſtändigen Größen mit Potenzen der veränderlichen iſt, deren Exponenten poſitiv und beſtändig ſind,) bey jedem Werthe der veränderlichen Größe einander gleich ſind; ſo ſind die beſtändigen Größen, welche als Coefficienten gleicher Potenzen der veränderlichen Größen vorkommen, ebenfalls einander gleich; d. h. wenn bey jedem Werthe von x,

$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+Dx^{\delta}+\ldots = ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+dx^{\delta}+\ldots$

iſt, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ poſitive beſtändige Zahlen ſind, ſie mögen übrigens ganz oder gebrochen ſeyn; ſo iſt auch $A = a$, $B = b$, $C = c$ ꝛc.

Da man nämlich die Glieder beyder Functionen immer ſo ordnen kann, daß in jeder derſelben die größern Potenzen von x auf die kleinern folgen, ſo kann man hier voraus ſetzen, daß $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$, $\delta > \gamma \ldots$ ſey.

Dividirt man nun beyde Functionen durch x^α, so gibt dieses $A+Bx^{\beta-\alpha}+Cx^{\gamma-\alpha}+Dx^{\delta-\alpha}+\ldots = a+bx^{\beta-\alpha}+cx^{\gamma-\alpha}+dx^{\delta-\alpha}+\ldots$, und es wird daher, weil $\beta-\alpha$, $\gamma-\alpha$, $\delta-\alpha$, ... positiv seyn müssen, für $x=0$, $A=a$, und, weil A und a von x unabhängige Größen sind, auch für jeden andern Werth von x, $A=a$; woraus dann die Gleichung

$$Bx^{\beta-\alpha}+Cx^{\gamma-\alpha}+Dx^{\delta-\alpha}+\ldots = bx^{\beta-\alpha}+cx^{\gamma-\alpha}+dx^{\delta-\alpha}+\ldots$$

folgt, aus der man durch die Division mit $x^{\beta-\alpha}$ erhält:

$$B+Cx^{\gamma-\beta}+Dx^{\delta-\beta}+\ldots = b+cx^{\gamma-\beta}+dx^{\delta-\beta}+\ldots$$

Diese Gleichung gibt wieder wegen der positiven Exponenten $\gamma-\beta$, $\delta-\beta$, ..., wenn man $x=0$ setzt, $B=b$; die Größen B und b sind aber beständige, also ist auch bey jedem andern Werthe von x, $B=b$.

Auf ähnliche Art läßt sich die Gleichheit der übrigen Coefficienten C und c, D und d ꝛc. folgern.

§. 96.

Der angeführte Satz ist nicht nur richtig, wenn $\alpha=0$ ist, (denn in diesem Falle wird beym Beweise bloß die Division durch x^α erspart), sondern auch dann, wenn Potenzen von x mit negativen Exponenten vorkommen; denn man kann die Functionen, ohne ihre Gleichheit aufzuheben, und ohne etwas an ihren Coefficienten zu verändern, auf die im Satze vorausgesetzte Form bringen, wenn man beyde Functionen mit einer Potenz von x multiplicirt, deren Exponent positiv und größer ist, als der größte von den vorkommenden negativen Exponenten.

§. 97.

Es sey $y=ax^m+bx^{m+1}+cx^{m+2}+dx^{m+3}+\ldots = x^m(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)$, und m eine ganze positive Zahl oder Null.

Bey stetiger Veränderung von x muß sich auch $bx+cx^2+dx^3+\ldots$ stetig verändern; wenn daher V und V′ zwey von einander unterschiedene Werthe von $bx+cx^2+dx^3+\ldots$

sind, welche mit zwey Werthen v und v' von x zusammengehörten, so gibt es also immer einen zwischen v und v' fallenden Werth von x, wodurch die Größe $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ einen gegebenen, zwischen V und V' fallenden Werth VV erhält.

Sollte es mehrere zwischen v und v' fallende Werthe von x geben, welche der Größe $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ einen solchen gegebenen Werth VV ertheilen, so muß einer dieser Werthe von x, welcher u heiße, am wenigsten von v unterschieden seyn, und alle Werthe von x, welche von v weniger unterschieden sind, als u, werden der Größe $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ Werthe geben, welche von V ebenfalls weniger unterschieden sind, als VV von V unterschieden ist.

Nun wird $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots =$ Null, wenn $x = 0$ ist, und man nehme an, daß für einen gewissen Werth von x, $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots > a$ werde: so gibt es immer einen solchen Werth u von x, daß dadurch nicht nur $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ einen Werth VV erhält, welcher $< a$ ist, sondern daß zugleich bey jedem Werthe von x, welcher $< u$ ist, $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ immer $<$ VV wird.

Wenn $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots < a$ ist, so ist auch $bx^{m+1} + cx^{m+2} + dx^{m+3} + \ldots < ax^m$; es ist also bey einer Größe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$ immer ein Werth u von x möglich, wodurch jedes beliebige Glied derselben größer wird, als die Summe aller darauf folgenden Glieder, und auch größer bleibt, wenn man x kleiner als u annimmt.

III. Abschnitt.

Von der Auflösung der gebrochenen Functionen in Reihen und in Partial-Brüche.

§. 98.

Nach §. 94. ist der Quotient, den man erhält, wenn man eine Function von der Form $a + b x^\delta + c x^{2\delta} + \ldots$ durch eine andere von eben derselben Form dividirt, wieder eine solche Function.

Wenn ein solcher Quotient anzugeben ist, so weiß man also schon, daß seine Form $A + B x^\delta + C x^{2\delta} + \ldots$ seyn müsse, und es kömmt nur noch darauf an, A, B, C... durch die beständigen, im Dividend und Divisor vorkommenden Coefficienten der Potenzen von x auszudrücken.

Dieses kann auf folgende Art leichter, als durch die Division geschehen:

Man multiplicire $A + B x^\delta + C x^{2\delta} + \ldots$ mit dem Divisor, so ist das Product eine Function von x, welche mit dem Dividend einerley Form hat (§. 92.), und demselben bey jedem Werthe von x gleich ist. Nach §. 95. erhält man also dadurch Gleichungen, aus welchen sich A, B, C,... finden lassen. Die Bestimmung eines solchen Quotienten nennt man die **Auflösung einer gebrochenen Function in eine Reihe.**

Beyspiel I.

Den Bruch $\frac{1 + x + 2x^3}{1 - 2x}$ in eine Reihe aufzulösen. —

Man setze $\frac{1 + x + 2x^3}{1 - 2x} = A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \ldots$

daraus folgt $1+x+2x^3 = A+B\}x+C\}x^2+D\}x^3+E\}x^4+\ldots$
$\quad -2A\} \quad -2B\} \quad -2C\} \quad -2D\}$

Mithin ist $A=1$,

$B-2A=1$, $B=2A+1=3$

$C-2B=0$, $C=2B=6$

$D-2C=2$, $D=2C+2=14$

$E-2D=0$, $E=2D=28$ ꝛc.

Also erhält man

$$\frac{1+x+2x^3}{1-2x} = 1+3x+6x^2+14x^3+28x^4+\ldots$$

Beyspiel II.

Den Bruch $\frac{6+x^2}{3+8x^2-5x^4}$ in eine Reihe aufzulösen. —

Man setze

$$\frac{6+x^2}{3+8x^2-5x^4} = A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+Ex^8+\ldots,$$

so ist

$6+x^2 = 3A+3B\}x^2+3C\}x^4+3D\}x^6+3E\}x^8+\ldots$
$\quad +8A\} \quad +8B\} \quad +8C\} \quad +8D\} \quad +\ldots$
$\quad -5A\} \quad -5B\} \quad -5C\} \quad -\ldots$

Also $3A=6$, $A=2$;

$3B+8A=1$, $3B=1-8A=-15$, $B=-5$;

$3C+8B-5A=0$, $3C=-8B+5A=50$, $C=\frac{50}{3}$;

$3D+8C-5B=0$, $3D=-8C+5B=-\frac{475}{3}$, $D=-\frac{475}{3^2}$;

$3E+8D-5C=0$, $3E=-8D+5C=\frac{4550}{3^2}$, $E=\frac{4550}{3^3}$.

Mithin ist

$$\frac{6+x^2}{3+8x^2-5x^4} = 2-5x^2+\frac{50}{3}x^4-\frac{475}{3^2}x^6+\frac{4550}{3^3}x^8\ldots$$

Beyspiel III.

Es soll der Bruch $\frac{1+\sqrt{x}-2x}{3-\sqrt[3]{x}}$ in eine Reihe aufgelöset

werden. —

Weil $\frac{1+\sqrt{x}-2x}{3-\sqrt[3]{x}} = \frac{1+x^{\frac{1}{2}}-2x}{3-x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1+x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{6}{6}}}{3-x^{\frac{2}{6}}}$ ist,

so setze man

$$\frac{1+x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{6}{6}}}{3-x^{\frac{2}{6}}} = A+Bx^{\frac{1}{6}}+Cx^{\frac{2}{6}}+Dx^{\frac{3}{6}}+Ex^{\frac{4}{6}}+\ldots;$$ dann ist

$$1+x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{6}{6}} = 3A+3Bx^{\frac{1}{6}}+3C\Big\}x^{\frac{2}{6}}+3D\Big\}x^{\frac{3}{6}}+3E\Big\}x^{\frac{4}{6}}+\ldots$$
$$\quad -A \qquad\quad -B \qquad\quad -C \qquad -\ldots$$

also $3A=1$, $3B=0$, $3C-A=0$, $3D-B=1$, $3E-C=0$,
und daraus $A=\frac{1}{3}$, $B=0$, $C=\frac{1}{9}$, $D=\frac{1}{3}$, $E=\frac{1}{27}$;

mithin $\frac{1+\sqrt{x}-2x}{3-\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}x^{\frac{2}{6}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{6}}+\frac{1}{27}x^{\frac{4}{6}}\ldots$

§. 99.

Wenn der Nenner und Zähler einer solchen gebrochenen Function aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehen, und die höchste Potenz von x im Nenner größer ist als im Zähler, so wird im Quotienten der Coefficient eines jeden Gliedes von demjenigen angefangen, welches die im Nenner vorkommende höchste Potenz von x enthält, auf einerley Weise durch die Coefficienten der vorangehenden Glieder bestimmt.

So ist im Beyspiele II. des vorhergehenden §., x^4 die höchste Potenz von x im Nenner, und im Quotienten der Coefficient dieser Potenz, $C=(-8B+5A):3$, der Coefficient des folgenden Gliedes, $D=(-8C+5B):3$, der Coefficient des nächsten Gliedes, $E=(-8D+5C):3$ u. s. w., so daß $C=(-8B+5A):3$ der allgemeine Ausdruck für den Coefficienten eines jeden Gliedes vom dritten angefangen ist, wenn B den Coefficienten des zunächst vorhergehenden, und A den Coefficienten des vor diesem kommenden Gliedes bezeichnet.

Enthält aber der Zähler höhere Potenzen von x als der Nenner, so tritt die angeführte Eigenschaft der Coefficienten erst mit dem Gliede des Quotienten ein, welches auf dasjenige folgt, in dem die höchste im Zähler vorhandene Potenz von x vorkömmt, wie im Beyspiele I. des vorhergehenden §.

Eine Reihe, deren Glieder auf einerley Weise durch die vorhergehenden Glieder bestimmt werden, heißt eine wiederkehrende Reihe; also wird die Reihe der Glieder eines Quotienten, welchen man durch die Division einer Function von der Form $a + bx^\delta + cx^{2\delta} + \ldots$ und von einer bestimmten Anzahl Glieder, mit einer Function von der nämlichen Form und von einer ebenfalls bestimmten Anzahl Glieder erhält, immer wiederkehrend; nur werden die Coefficienten von einem gewissen Gliede angefangen sämmtlich $= 0$, wenn der Divisor ein Factor des Dividends ist.

§. 100.

Es sey der Nenner einer gebrochenen Function von x durch x^m theilbar, und der Bruch, den man erhält, wenn man den Nenner durch x^m dividirt, habe die bisher vorausgesetzte Form; so ist $A + Bx^\delta + Cx^{2\delta} + \ldots$ die Form der gleichgeltenden Reihe (§. 94.). Weil aber die gegebene Function durch die Division ihres Nenners, mit x^m multiplicirt wird, so ist daher die Form der einer solchen Function gleichgeltenden Reihe:

$$\frac{A}{x^m} + \frac{Bx^\delta}{x^m} + \frac{Cx^{2\delta}}{x^m} + \ldots \text{ oder } Ax^{-m} + Bx^{\delta-m} + Cx^{2\delta-m} + \ldots$$

Um also den Bruch $\frac{3 + x^2}{x^3 - 2x^5 + 4x^7}$ in eine Reihe aufzulösen, muß $\frac{3 + x^2}{x^3 - 2x^5 + 4x^7} = Ax^{-3} + Bx^{-1} + Cx + Dx^3 + Ex^5 + \ldots$ gesetzt werden.

* §. 101.

Es gebe $\frac{P}{Q} + \frac{a}{b + cx}$ als Summe den Bruch $\frac{R}{S}$, so ist $R = bP + cPx + aQ$ und $S = bQ + cQx$, wenn $b + cx$ kein Factor von Q ist.

Sind nun P und Q ganze rationale Functionen von x, so sind auch R und S solche Functionen; und wenn in den Gliedern

der Function P alle Potenzen: x^0, x, x^2, ... bis x^{m-1} vorkommen, und in Q die Potenz x^m vorhanden ist, so enthält R alle Potenzen von x^0 angefangen bis x^m, S aber enthält auch x^{m+1}.

Man nehme an, es sey $\frac{P}{Q}$ ein Bruch, welcher mit $\frac{a}{b+cx}$ einerley Form hat, so ist $m=1$, und $\frac{R}{S}$ die Summe zweyer Brüche von dieser Form; dann enthält R bloß x^0 und x, die höchste Potenz von x in S ist aber x^2.

Es bezeichne nun $\frac{P}{Q}$ die Summe zweyer Brüche von der Form $\frac{a}{b+cx}$, so ist $m=2$; folglich kommen in R die Potenzen: x^0, x und x^2 vor, und in S ist x^3 die höchste Potenz von x.

Diese Art zu schließen beweiset also, daß die Summe von m Brüchen, wovon jeder die Form $\frac{a}{b+cx}$ hat, und deren Nenner durchaus ungleich sind, ein Bruch sey, in dessen Zähler im Allgemeinen alle Potenzen von x^0 bis x^{m-1} enthalten sind, in dessen Nenner aber die höchste Potenz x^m ist.

* §. 102.

Man findet $\frac{A}{(b+cx)^n} + \frac{B}{(b+cx)^{n-1}} + \frac{C}{(b+cx)^{n-2}} + \ldots + \frac{H}{(b+cx)^2} + \frac{I}{b+cx} =$

$$\frac{A+B(b+cx)+C(b+cx)^2+\ldots+H(b+cx)^{n-2}+I(b+cx)^{n-1}}{(b+cx)^n},$$

welches wieder, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, eine gebrochene Function von der Beschaffenheit ist, daß im Zähler alle Potenzen von x^0 bis x^{n-1} vorkommen, und im Nenner die höchste Potenz x^n ist (§. 3.).

* §. 103.

$\frac{P}{Q}$ und $\frac{R}{S}$ seyen zwey gebrochene rationale Functionen von

x; in Q sey x^m, in S aber x^n die höchste Potenz von x; hingegen seyen in P alle Potenzen von x^0 bis x^{m-1} und in R bis x^{n-1} vorhanden; so gibt der Ausdruck ihrer Summe: $\frac{PS+QR}{QS}$ zu erkennen, daß im Zähler dieser Summe alle Potenzen von x^0 bis x^{m+n-1} vorkommen, hingegen die höchste Potenz von x im Nenner, x^{m+n} sey.

* §. 104.

Eine gebrochene rationale Function von x, bey welcher die höchste Potenz von x im Zähler eben so groß oder größer ist, als im Nenner, läßt sich immer als eine Summe einer ganzen Function und einer solchen gebrochenen Function von x darstellen, daß im Nenner eine höhere Potenz von x vorkömmt, als im Zähler.

Man ordne nämlich die Glieder des Zählers und Nenners so, daß die niedrigern Potenzen von x auf die höhern folgen, und dividire den Zähler durch den Nenner so weit, bis man einen Rest erhält, in welchem die höchste Potenz von x kleiner ist, als im Divisor.

Auf diese Art findet man z. B.

$$\frac{5+x^4}{2-x-x^2} = -3+x-x^2+\frac{11-5x}{2-x-x^2}.$$

* §. 105.

Wenn der Nenner Q einer gebrochenen rationalen Function $\frac{P}{Q}$ von x ein Product von Factoren ist, welche sämmtlich Functionen von x sind, so lassen sich Brüche finden, deren Nenner diese Factoren sind, und welche Brüche zusammen genommen bey jedem Werthe von x dem Bruche $\frac{P}{Q}$ gleich sind.

Solche Brüche heißen in Beziehung auf den Bruch $\frac{P}{Q}$ die Partial-Brüche desselben, und werden auf folgende Art aus $\frac{P}{Q}$ hergeleitet:

1.) Wenn die Factoren von Q sämmtlich die Form $b + cx$ haben, ungleich sind, und die höchste Potenz von x in P kleiner ist, als in Q, so setze man $\frac{P}{Q}$ der Summe von Brüchen gleich, deren Zähler beständige Größen A, B, C,... und deren Nenner die einzelnen Factoren von Q sind.

Man bringe diese Brüche auf einerley Benennung, so ist Q ihr gemeinschaftlicher Nenner, und P bey jedem Werthe von x der Summe der Zähler gleich, welche Summe m verschiedene Potenzen von x, nämlich von x^0 bis x^{m-1} enthält, wenn x^m die höchste Potenz von x in Q ist (§. 101); denn Q hat in diesem Falle m Factoren von der Form $b + cx$ (§. 38.), und es sind also die m Größen A, B, C,... bestimmt, weil man vermittelst des Satzes (§. 95.) zwischen diesen Größen m Gleichungen hat (§. 32.)

2.) Wenn Q ein Product von n gleichen Factoren von der Form $b + cx$, und die höchste Potenz von x in P kleiner ist, als in Q, so setze man $\frac{P}{Q} = \frac{A}{(b+cx)^n} + \frac{B}{(b+cx)^{n-1}} + \ldots + \frac{I}{b+cx}$.

Man bringe diese Brüche auf einerley Benennung, so erhält man $(b + cx)^n = Q$ als Nenner; daher ist die Summe der Zähler bey jedem Werthe von x, $= P$, und in dieser Summe kommen alle Potenzen von x^0 bis x^{n-1} (§. 102.), also n verschiedene Potenzen von x vor; mithin erhält man durch den Satz (§. 95.) n Gleichungen zur Bestimmung der n Größen A, B, C, ...

3.) Wenn Q zwar lauter Factoren von der Form $b + cx$ hat, unter welchen aber einige einander gleich sind, so mache man zwey Summen von Brüchen, die erste nach nro. 1. aus den ungleichen, und die zweyte nach nro. 2. aus den gleichen Factoren von Q, und setze $\frac{P}{Q}$ allen diesen Brüchen zusammen genommen gleich; so bekömmt man, um die Zähler wie in nro. 1.

y. 2. bestimmen zu können, eben so viele Gleichungen, als Zähler zu bestimmen sind, welches sich aus §. 103. ergibt.

4.) Wenn ein Factor des Nenners Q die Form $a+bx+cx^2$ hat, so muß für denselben ein Bruch von der Form $\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}$ gesetzt werden; denn nach §. 81. ist $a+bx+cx^2=\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}+cx\right)\left(\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}+x\right)$; also kömmt der dem Factor $a+bx+cx^2$ zugehörige Bruch an die Stelle zweyer Brüche von der Form $\frac{a}{b+cx}$, deren Summe die Form $\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}$ hat (§. 101.). Eben so findet man, daß für einen Factor des Nenners von der Form $a+bx+cx^2+dx^3$ ein Bruch von der Form $\frac{A+Bx+Cx^2}{a+bx+cx^2+dx^3}$ gesetzt werden müsse.

5.) Wenn die höchste Potenz von x im Zähler einer solchen Function nicht kleiner ist als im Nenner, so muß vor allem die darin enthaltene ganze Function von x nach §. 104. abgesondert werden, und erst dann kann man die Zerlegung mit dem übrig bleibenden Bruche vornehmen.

* §. 106.

Um eine gebrochene rationale Function von x in Partial-Brüche zu zerlegen, suche man die Factoren des Nenners, und verfahre nach der Beschaffenheit dieser Factoren nach nro. 1, 2, oder 3 des vorhergehenden §., wenn alle Factoren des Nenners von der Form $b+cx$ möglich sind, und sich nach §. 81. u. 82. bestimmen lassen; sollte aber das letztere nicht angehen (§. 83.), oder einige von diesen Factoren unmöglich seyn, so verfahre man mit den Factoren von der Form $a+bx+cx^2$, ꝛc. nach §. 105. nro. 4.

Beyspiel I.

Den Bruch $\frac{1+5x}{2x-3x^3}$ in Partial-Brüche zu zerlegen. —

Es ist $2x - 3x^3 = x(\sqrt{2} + x\sqrt{3})(\sqrt{2} - x\sqrt{3})$, (§. 81.); daher setze man §. 105. nro. 1.

$$\frac{1+5x}{2x-3x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{2}+x\sqrt{3}} + \frac{C}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}};$$ so ist

$$1 + 5x = 2A + B\sqrt{2} + C\sqrt{2} \Big\}x - 3A - B\sqrt{3} + C\sqrt{3} \Big\}x^2;$$ mithin

$$\left.\begin{array}{l} 2A = 1, \\ B\sqrt{2} + C\sqrt{2} = 5, \\ -3A - B\sqrt{3} + C\sqrt{3} = 0 \end{array}\right\} \text{(§. 95.)}$$

und daraus $A = \frac{1}{2}$,

$$B + C = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \left|\; B = \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4}, \right.$$

$$-B + C = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left|\; C = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}; \right.$$

also ist $\frac{1+5x}{2x-3x^3} = \frac{1}{2x} + \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4(\sqrt{2}+x\sqrt{3})} + \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4(\sqrt{2}-x\sqrt{3})}$.

Beyspiel II.

Es soll der Bruch $\frac{2 + 3x - 7x^2}{8 - 12x + 6x^2 - x^3}$ in Partial-Brüche zerlegt werden. —

Weil $8 - 12x + 6x^2 - x^3 = (2-x)^3$, so ist nach §. 105. nro. 2., $\frac{2+3x-7x^2}{8-12x+6x^2-x^3} = \frac{A}{(2-x)^3} + \frac{B}{(2-x)^2} + \frac{C}{2-x}$;

mithin $2 + 3x - 7x^2 = A - B \Big\}x + C x^2$; also

$$+2B - 4C \Big\}$$

$$+4C$$

$A + 2B + 4C = 2$, $-B - 4C = 3$, und $C = -7$.

Man hat also unmittelbar $C = -7$, daraus $B = -3 - 4C = 25$, und dann $A = 2 - 2B - 4C = -20$;

daher ist

$$\frac{2+3x-7x^2}{8-12x+6x^2-x^3} = -\frac{20}{(2-x)^3} + \frac{25}{(2-x)^2} - \frac{7}{2-x}.$$

Beyspiel III.

Die Partial-Brüche von $\frac{5+x^4}{2-x-x^2}$ zu finden. —

Man findet erstlich

$$\frac{5+x^4}{2-x-x^2} = -3+x-x^2 + \frac{11-5x}{2-x-x^2},$$ und dann

$2-x-x^2=(1-x)(2+x)$; also setze man

$\frac{11-5x}{2-x-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{2+x}$, so ist

$11-5x=2A+A\}x$, und daraus
$\quad\quad +B-B\}$

$2A+B=11$, $A-B=5$, welches $A=2$, und $B=7$ gibt.

Mithin ist

$$\frac{5+x^4}{2-x-x^2} = -3+x-x^2+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{2+x}.$$

Beyspiel IV.

Den Bruch $\frac{1}{2x-x^2+2x^5-x^6}$ in Partial-Brüche zu zerlegen. —

Man findet x und $2-x$ als Factoren des Nenners, und es ist $\frac{2x-x^2+2x^5-x^6}{x(2-x)}=1+x^4$.

Nun sind aber alle Wurzeln der Gleichung: $x^4+1=0$ unmöglich, folglich sind es auch alle vier daraus folgenden einfachen Factoren von x^4+1. Obwohl man weiß, daß x^4+1 das Product zweyer möglichen quadratischen Factoren seyn müsse (§. 83.), so lassen sich jedoch dieselben nach den vorgetragenen Sätzen nicht finden; daher muß man nach §. 105. nro. 4.,

$$\frac{1}{2x - x^2 + 2x^5 - x^6} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2 - x} + \frac{C + Dx + Ex^2 + Fx^3}{1 + x^4}$$

setzen, woraus man zur Bestimmung der Grösen A, B, C, ... die Gleichungen: $2A = 1$, $-A + B + 2C = 0$, $-C + 2D = 0$, $-D + 2E = 0$, $2A - E + 2F = 0$;und $-A + B - F = 0$ erhält, aus welchen $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{34}$, $C = \frac{4}{17}$, $D = \frac{2}{17}$, $E = \frac{1}{17}$ und $F = -\frac{8}{17}$ folgt.

Daher ist der gegebene Bruch =

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{34(2 - x)} + \frac{4 + 2x + x^2 - 8x^3}{17(1 + x^4)}.$$

IV. Abschnitt.

Von der Umkehrung der Reihen.

* §. 107.

Es seyen die Glieder einer Reihe nach den Potenzen einer veränderlichen Grösse x geordnet, und y bezeichne den Werth der Reihe bey jedem Werthe von x.

Diejenige Verwandlung einer solchen Reihe, durch welche man findet, wie x durch y bestimmt werde, wodurch also x als als entwickelte Function von y gefunden wird, heißt die Umkehrung der Reihe.

* §. 108.

Um die Reihe $y = 2x + 6x^2 + 18x^3 + 54x^4 + \ldots$ umzukehren, mache man $y^2 = 4x^2 + 24x^3 + 108x^4 + \ldots$ (§. 13.), und addire $-\frac{3}{2}y^2 = -6x^2 - 36x^3 - 162x^4 - \ldots$ zu der gegebenen Reihe, so erhält man

A] $y - \frac{3}{2}y^2 = 2x - 18x^3 - 108x^4 \ldots$

Dann nehme man $y^3 = 8x^3 + 72x^4 + \ldots$ und addire $\frac{9}{4}y^3 = 18x^3 + 162x^4 + \ldots$ zur Gleichung A, so ist die Summe

B] $y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{4}y^3 = 2x + 54x^4 + \ldots$

Darauf findet man aus der gegebenen Reihe, $y^4 = 16x^4 + \ldots$, und $-\frac{27}{8}y^4 = -54x^4 \ldots$ zu B addirt, gibt

C] $y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{4}y^3 - \frac{27}{8}y^4 = 2x \ldots$

Das bisher angewandte Verfahren hatte zum Zwecke, von den Gliedern der Reihe, welche auf das erste folgen, eines nach dem andern wegzuschaffen, und dieser Zweck wird erreicht, wenn man

1.) eine solche Potenz von y bildet, daß ihr erstes Glied einerley Potenz von x mit der Potenz von x im wegzuschaffenden Gliede erhält; wenn man

2.) diese Potenz von y mit einer Zahl multiplicirt, wodurch das erste Glied der Potenz mit dem aus der Reihe wegzuschaffenden Gliede einen gleichen, aber entgegengesetzten Coefficienten erhält, und wenn man

3.) die so veränderte Potenz von y zur Gleichung addirt, aus welcher die Potenz von x zunächst wegzuschaffen ist.

Die in nro. 2. erwähnte Zahl wird gefunden, wenn man den Coefficienten des wegzuschaffenden Gliedes durch den Coefficienten des ersten Gliedes der nach nro. 1. gebildeten Potenz von y dividirt, und dem Quotienten das entgegengesetzte Zeichen gibt. So ist z. B. für $y^4 = 16x^4 + \ldots$, welche Potenz von y zur Wegschaffung von $+54x^4$ aus B dient, diese Zahl $= -(54:16) = -\frac{27}{8}$.

Man sieht ein, daß man auf diese Art beliebig viele Glieder der gegebenen Reihe wegschaffen könne, und dadurch eben so viele Glieder der umgekehrten Reihe finde, daß also aus C die letztere: $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}y^2 + \frac{5}{8}y^3 - \frac{27}{16}y^4 \ldots$ sey.

Auch folgt aus dem bey der Umkehrung gebrauchten Verfahren, daß die Form der umgekehrten Reihe keineswegs von den Coefficienten der Potenzen von x in der gegebenen Reihe abhange, und daß man also durch die Umkehrung einer Reihe von der

Form $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ immer wieder eine Reihe von der nämlichen Form: $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$ erhalten müsse.

* §. 109.

Gewöhnlich haben die Reihen eine solche Form, daß die Exponenten der Potenzen der veränderlichen Größe in einer arithmetischen Progression auf einander folgen; d. h. sie haben die Form:

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + dx^{\alpha+3\delta} + \ldots$$

Um für solche Reihen die Form derjenigen, die man durch ihre Umkehrung erhält, zu finden, nehme man an, es seyen alle Glieder der Reihe, welche auf das erste folgen, bis zum n^{ten} Gliede nach §. 108. weggeschafft, und dadurch die Gleichung: $y + \ldots = ax^{\alpha} + Nx^{\alpha+(n-1)\delta} + \ldots$ erhalten worden, so muß man zur Wegschaffung des Gliedes $Nx^{\alpha+(n-1)\delta}$ nach §. 108. nro. 1., $y^m = (ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots)^m$ so bilden, daß das erste Glied dieser Potenz die Zahl $\alpha + (n-1)\delta$ als Exponenten erhalte.

Es ist aber $ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots = x^{\alpha}X$ $(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)$, mithin $y^m = x^{\alpha m}(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)^m$, und da $a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots$ zur Potenz des Exponenten m erhoben, eine Reihe von der nämlichen Form gibt (§. 93.), so kann man

$$(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)^m = a' + b'x^{\delta} + c'x^{2\delta} + \ldots$$

setzen, woraus $y^m = x^{\alpha m}(a' + b'x^{\delta} + c'x^{2\delta} + \ldots)$

$$= a'x^{\alpha m} + b'x^{\alpha m+\delta} + c'x^{\alpha m+2\delta} + \ldots$$

folgt; daher muß $\alpha m = \alpha + (n-1)\delta$, also $m = \frac{\alpha + (n-1)\delta}{\alpha}$

seyn, und mithin (§. 108. nro. 2.) $-\frac{N}{a'}y^{\frac{\alpha+(n-1)\delta}{\alpha}} =$

$$-Nx^{\alpha+(n-1)\delta} - \frac{b'N}{a'}x^{\alpha+n\delta} - \frac{c'N}{a'x}x^{\alpha+(n+1)\delta} \ldots \text{zu } y + \ldots$$

$= ax^{\alpha} + Nx^{\alpha+(n-1)\delta} + \ldots$ addirt werden, wodurch $Nx^{\alpha+(n-1)\delta}$ weggeschafft wird, und die weggeschafften vorhergehenden Potenzen von x nicht mehr zum Vorschein kommen.

Die im n^{ten} Gliede derjenigen Reihe, welche dem Werthe ax^{α} gleich ist, vorkommende Potenz von y hat also $\frac{\alpha+(n-1)\delta}{\alpha}$ zum Exponenten, aus welchem folgt, daß die Exponenten der Potenzen von y in dieser Reihe der Ordnung nach: $1, \frac{\alpha+\delta}{\alpha}, \frac{\alpha+2\delta}{\alpha}, \frac{\alpha+3\delta}{\alpha} \ldots$ seyn müssen; nämlich es wird ax^{α} durch eine Reihe von der Form:

$$\mathfrak{A}y + \mathfrak{B}y^{\frac{\alpha+\delta}{\alpha}} + \mathfrak{C}y^{\frac{\alpha+2\delta}{\alpha}} + \mathfrak{D}y^{\frac{\alpha+3\delta}{\alpha}} + \ldots \text{ ausgedrückt.}$$

Daraus wird $x^{\alpha} = \frac{\mathfrak{A}}{a}y + \frac{\mathfrak{B}}{a}y^{\frac{\alpha+\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{C}}{a}y^{\frac{\alpha+2\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{D}}{a}y^{\frac{\alpha+3\delta}{\alpha}} + \ldots$

$$= y\left(\frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{B}}{a}y^{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{C}}{a}y^{\frac{2\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{D}}{a}y^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots\right), \text{ und daher}$$

$$x = y^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{B}}{a}y^{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{C}}{a}y^{\frac{2\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{D}}{a}y^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Allein weil $\left(\frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{B}}{a}y^{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{C}}{a}y^{\frac{2\delta}{\alpha}} + \frac{\mathfrak{D}}{a}y^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ wieder eine Reihe von dieser Form:

$$A + By^{\frac{\delta}{\alpha}} + Cy^{\frac{2\delta}{\alpha}} + Dy^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots \text{ gibt (§. 93.), so wird}$$

$$x = y^{\frac{1}{\alpha}}\left(A + By^{\frac{\delta}{\alpha}} + Cy^{\frac{2\delta}{\alpha}} + Dy^{\frac{3\delta}{\alpha}} + \ldots\right)$$

$$= Ay^{\frac{1}{\alpha}} + By^{\frac{1+\delta}{\alpha}} + Cy^{\frac{1+2\delta}{\alpha}} + Dy^{\frac{1+3\delta}{\alpha}} + \ldots$$

Wenn daher eine Reihe von der vorausgesetzten Form umzukehren ist, so findet man die Exponenten der Potenzen von y in der umgekehrten Reihe, und mithin die Form dieser Reihe, wenn man die Glieder einer Progression, welche mit 1 anfängt, und wobey die Differenz der Glieder so groß ist, als in der Progression der Exponenten der Potenzen von x, durch den Exponenten der Potenz von x im ersten Gliede der gegebenen Reihe, dividirt.

* §. 110.

Es sey $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$ die umzukehrende Reihe, und $x = Ay^{\pi} + By^{\varrho} + Cy^{\sigma} + \ldots$ die Form ihrer Umkehrung; so ist die Reihe umgekehrt, wenn die beständigen Coefficienten A, B, C... bekannt sind, nämlich wenn man weiß, wie A, B, C... durch a, b, c... $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bestimmt werden. Diese Coefficienten lassen sich nun auf folgende Art leichter, als nach §. 108. finden:

Man bilde aus $x = Ay^{\pi} + By^{\varrho} + Cy^{\sigma} + \ldots$ die Potenzen: $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}, \ldots$ (§. 13.) und substituire die Werthe dieser Potenzen als Functionen von y ausgedrückt, in der gegebenen Reihe, oder man bilde, wenn die Rechnung auf diese Art leichter ist, aus $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$ die Potenzen: $y^{\pi}, y^{\varrho}, y^{\sigma}, \ldots$ und substituire diese Potenzen in $x = Ay^{\pi} + By^{\varrho} + Cy^{\sigma} + \ldots$

Man erhält dadurch eine Reihe, welche im ersten Falle immer $= y$, und im zweyten $= x$ ist, aus welcher dann die Coefficienten A, B, C, ... vermittelst des Satzes §. 95. gefunden werden können.

Beyspiel I.

Es soll die Reihe: $y = x^2 - 2x^4 + 3x^6 - 4x^8 + \ldots$ umgekehrt werden. —

Man setze $x = A y^{\frac{1}{2}} + B y^{\frac{3}{2}} + C y^{\frac{5}{2}} + D y^{\frac{7}{2}} + \ldots$ (§. 109.), so ist

$$x^2 = A^2 y + 2AB y^2 + \left.\begin{matrix} B^2 \\ +2AC \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} 2BC \\ +2AD \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots$$

$$x^4 = A^4 y^2 + 4 A^3 B y^3 + \left.\begin{matrix} 6 A^2 B^2 \\ + 4 A^3 C \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots$$

$$x^6 = A^6 y^3 + 6 A^5 B y^4 + \ldots$$

$x^8 = A^8 y^4 + \ldots$; mithin

$$y = A^2 y + 2 A B \left\{\begin{matrix} y^2 + B^2 \\ + 2AC \\ - 8A^3B \\ + 3A^6 \end{matrix}\right\} y^3 + \left\{\begin{matrix} 2 B C \\ + 2 A D \\ - 12 A^2 B^2 \\ - 8 A^3 C \\ + 18 A^5 B \\ - 4 A^8 \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots$$
$$- 2 A^4$$

und daher $A^2 = 1$, $2 A B - 2 A^4 = 0$, oder $B - A^3 = 0$, $B^2 + 2 A C - 8 A^3 B + 3 A^6 = 0$, $2 B C + 2 A D - 12 A^2 B^2 - 8 A^3 C + 18 A^5 B - 4 A^8 = 0$; . . . aus welchen Gleichungen $A = 1$, oder auch $A = -1$; aus dem ersten Werthe von A, $B = 1$, $C = 2$, $D = 5$, aus dem zweyten aber $B = -1$, $C = -2$ und $D = -5$ folgt. Es ist also die umgekehrte Reihe:

$$x = \pm (y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + 2 y^{\frac{5}{2}} + 5 y^{\frac{7}{2}} + \ldots).$$

Beyspiel II.

Die Reihe: $y = 2 x^{\frac{1}{3}} + 4 x^{\frac{2}{3}} + 6 x + 8 x^{\frac{4}{3}} + \ldots$ umzukehren. —

Man setze $x = A y^3 + B y^4 + C y^5 + D y^6 + \ldots$ (§. 109.).

Aus der gegebenen Reihe ist

$$y^3 = 8 x + 48 x^{\frac{4}{3}} + 168 x^{\frac{5}{3}} + 448 x^2 \ldots$$

$$y^4 = 16 x^{\frac{4}{3}} + 128 x^{\frac{5}{3}} + 576 x^2 + \ldots$$

$$y^5 = 32 x^{\frac{5}{3}} + 320 x^2 + \ldots$$

$y^6 = 64 x^2 + \ldots$; also ist

$$x = 8 A x + 48 A \left\{\begin{matrix} x^{\frac{4}{3}} + 168 A \\ + 128 B \\ + 32 C \end{matrix}\right\} x^{\frac{5}{3}} + \left\{\begin{matrix} 448 A \\ + 576 B \\ + 320 C \\ + 64 D \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$$
$$+ 16 B$$

woraus nach §. 95. die Gleichungen:
$8A = 1$, $16B + 48A = 0$, oder $B + 3A = 0$,
$32C + 128B + 168A = 0$, oder $4C + 16B + 21A = 0$,
$64D + 320C + 576B + 448A = 0$, oder
$D + 5C + 9B + 7A = 0$ abgeleitet werden.

Diese Gleichungen geben
$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = +\frac{27}{32}$ und $D = -\frac{55}{32}$;
demnach ist $x = \frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{8}y^4 + \frac{27}{32}y^5 - \frac{55}{32}y^6 \ldots$.

* §. 111.

Wenn in einer Reihe von der Form:
$y = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + dx^{\alpha+3\delta} + \ldots$, $\alpha = 0$,
mithin $y = a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + dx^{3\delta} + \ldots$ ist, so ist
$y - a = bx^{\delta} + cx^{2\delta} + dx^{3\delta} + \ldots$; mithin die Form der umgekehrten Reihe (§. 109.):

$$x = A(y-a)^{\frac{1}{\delta}} + B(y-a)^{\frac{1+\delta}{\delta}} + C(y-a)^{\frac{1+2\delta}{\delta}} + \ldots$$

Wollte man, nachdem die Coefficienten A, B, C, ... nach §. 95. gefunden worden sind, die Entwicklung der Potenzen von $y - a$ vornehmen, so würde man als Coefficienten einer jeden Potenz von y wieder eine Reihe von unbestimmt vielen Gliedern erhalten.

IV. Hauptstück.

Von der Differential-Rechnung.

I. Abschnitt.

Von dem Begriffe des Differentiales, und von den Eigenschaften der Differentialen unbestimmter Functionen.

§. 112.

Wenn der Unterschied zweyer gleichartigen Größen kleiner werden kann, als jede gegebene, mit denselben gleichartige Größe; so sagt man, die eine Größe könne der andern beliebig nahe kommen, oder sie könne sich der andern beliebig nähern.

§. 113.

Es sey w eine Größe, welche von einer veränderlichen Größe v dergestalt abhängt, daß ihr in Rücksicht auf eine gewisse, zwischen diesen beyden Größen Statt habende Beziehung kein bestimmter Werth zukommen kann, wenn man $v=o$ annimmt. Kann nun w durch die Abnahme von v einem bestimmten Werthe a beliebig nahe kommen, so heißt a die Grenze von w.

Kömmt der Größe w, abgesehen von der angeführten Beziehung, ein bestimmter Werth a zu, wenn v=o ist, so ist a die Grenze von w; denn weil bey stetiger Veränderung von v keine andere, als ebenfalls eine stetige Veränderung von w erfolgen kann, so kann sich w durch stetige Abnahme von v dem Werthe a beliebig nähern.

§. 114.

Man nehme an, daß die Glieder eines geometrischen Verhältnisses veränderlich seyen, und das Hinterglied als die, durch das Vorderglied und durch das Verhältniß bestimmte Größe mit dem Vordergliede zugleich Null werde.

Bey diesem Zustande der Glieder ist keine bestimmte Größe des Verhältnisses denkbar; also kömmt der Zahl, welche diese Größe angibt, nämlich dem Exponenten des Verhältnisses kein bestimmter Werth zu, wenn das Vorderglied Null ist; folglich hat der Exponent eines jeden Verhältnisses dieser Art eine Grenze.

Betrachtet man die Zahl, welche die Größe des Verhältnisses für jeden Werth des Vordergliedes angibt, bloß als Function des Vordergliedes (§. 84.), ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß dieselbe der Exponent des Verhältnisses sey, so ist der Werth dieser Zahl, welcher mit dem Werthe Null des Vordergliedes zusammengehört, die Grenze des Exponenten (§. 113.).

§. 115.

Wird in einem Verhältnisse v: u das Hinterglied u nicht Null, wenn v=o ist, so kömmt dem Verhältnisse für v=o kein bestimmter Werth zu, weil dann die Bestimmung von u durch v unmöglich ist.

Dessen ungeachtet hat der Exponent $\frac{u}{v}$ dieses Verhältnisses keine bestimmte Grenze; denn wenn man v stetig abnehmen läßt, so nimmt $\frac{u}{v}$ dergestalt zu, daß dieser Bruch größer werden kann, als jede gegebene beliebig große Zahl; also kann $\frac{u}{v}$ durch die

Abnahme von v keinem bestimmten Werthe a beliebig nahe kommen.

Man sagt in diesem Falle, die Grenze des Exponenten sey unendlich, und man bezeichnet dieselbe durch ∞.

§. 116.

Wenn sich in einer Function einer veränderlichen Größe die letztere verändert, so erhält man die zugehörige Veränderung der Function, wenn man zuerst jenen Werth derselben sucht, welchen sie durch den veränderten Werth der veränderlichen Größe, (der aus ihrem anfänglichen Werthe und aus ihrer Veränderung zusammen genommen besteht,) erhält; und dann von diesem veränderten Werthe der Function den ursprünglichen abzieht.

Der leichtern Uebersicht wegen bezeichnet man die Veränderungen der Größen dadurch, daß man dem Zeichen der Größe den Buchstaben Δ vorsetzt; Δx bezeichnet also eine unbestimmte Veränderung von x. Sind Potenzen der Veränderungen zu bezeichnen, so schreibt man die Exponenten derselben wie gewöhnlich neben die angegebene Bezeichnung der Veränderungen; um aber Veränderungen von Potenzen oder zusammen gesetzten Größen anzudeuten, werden die letztern in Klammern eingeschlossen, und dann das Δ vorgesetzt, oder auch das Δ bloß durch einen Punct davon getrennt. So wird $\Delta x \times \Delta x \times \Delta x$ durch Δx^3, hingegen eine Veränderung von x^3 durch $\Delta(x^3)$, oder auch durch $\Delta . x^3$ angezeigt.

Da $f(x)$ irgend eine Function von x bezeichnet (§. 87.), so drückt $f(x+\Delta x)$ ihren Werth aus, wenn $x+\Delta x$ statt x gesetzt wird; man hat also

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Beyspiel I.

Es sey $f(x) = ax^2 - bx$, so ist

$$f(x+\Delta x) = a(x+\Delta x)^2 - b(x+\Delta x)$$
$$= \left.\begin{matrix} ax^2 + 2ax \\ -bx - b \end{matrix}\right\} \Delta x + a\Delta x^2;$$

folglich $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$
$= (2ax - b)\Delta x + a\Delta x^2$
$= (2ax - b + a\Delta x)\Delta x.$

Beyspiel II.

Wenn $f(x) = ax$ ist, so ist $f(x+\Delta x) = a(x+\Delta x)$ $= ax + a\Delta x$, und $\Delta f(x) = a\Delta x$.

Beyspiel III.

Aus $f(x) = \frac{a}{x^2}$ folgt $f(x+\Delta x) = \frac{a}{(x+\Delta x)^2}$ und

$$\Delta f(x) = \frac{a}{(x+\Delta x)^2} - \frac{a}{x^2} = \frac{ax^2 - ax^2 - 2ax\Delta x - a\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2 x^2}$$
$$= -\frac{a(2x+\Delta x)\Delta x}{(x+\Delta x)^2 x^2}.$$

§. 117.

Wenn in einer Function von mehrern veränderlichen Größen die letztern selbst Functionen von einander sind, so ist durch die Veränderung einer einzigen derselben die zugehörige Veränderung einer jeden von den übrigen, und mithin auch die Veränderung der Function bestimmt.

Sind die veränderlichen Größen bekannte Functionen von einander, so läßt sich nach dem vorhergehenden §. die Veränderung einer jeden durch die Veränderung einer beliebigen aus ihnen, und mithin eben so die Veränderung der Function ausdrücken.

Sind aber die veränderlichen Größen noch unbestimmte Functionen von einander, so läßt sich bloß angeben, wie die Veränderung der Function durch die Veränderungen aller veränderlichen Größen bestimmt wird.

§. 118.

Im Verhältnisse der Veränderung einer veränderlichen Größe x zur Veränderung einer Function $f(x)$ derselben, nämlich im Verhältnisse $\Delta x : \Delta f(x)$ wird mit dem Vordergliede auch das

Hinterglied Null; folglich hat der Exponent des Verhältnisses eine Grenze (§. 114.)

Läßt sich nun der Werth angeben, welcher der, die Größe des Verhältnisses ausdrückenden Zahl, für $\Delta x = 0$ zukömmt, wenn man davon abstrahirt, daß diese Zahl der Exponent des Verhältnisses sey; so ist dieser Werth die Grenze des Exponenten (§. 113.).

Bezeichnet man den Exponenten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ des Verhältnisses $\Delta x : \Delta f(x)$ durchgehends mit p, und seine Grenze mit lim. p, so ist im 1sten Beyspiele des §. 116., $p = 2ax - b + a\Delta x$, und lim. $p = 2ax - b$. Im 2ten Beyspiele ist $p = a$, daher auch lim. $p = a$; und im 3ten, $p = -\frac{a(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x)^2 x^2}$, folglich lim. $p = -\frac{2a}{x^3}$.

§. 119.

Bestimmt man diejenige Veränderung der Function, welche durch eine willkürliche Veränderung der veränderlichen Größe dann hervorgebracht würde, wenn der Exponent des Verhältnisses beyder Veränderungen bey jedem Werthe der letztern beständig seiner Grenze gleich, und folglich von der Größe der Veränderungen selbst unabhängig bliebe, so heißt die, solchergestalt bestimmte Veränderung der Function das Differentiale derselben, und die willkürliche zu diesem Zwecke, nämlich zur Bestimmung des Differentiales der Function angenommene Veränderung der veränderlichen Größe heißt dann ebenfalls ihr Differentiale.

Eben so, wie man zusammen gehörige Veränderungen veränderlicher Größen durch ein vorgesetztes Δ bezeichnet, werden die Differentialen durch ein vorgesetztes d angezeigt.

Aus dem Verhältnisse der Veränderungen, $\Delta x : \Delta f(x)$, dessen Exponent p ist (§. 118.), folgt also das Verhältniß der Differentialen, $dx : df(x)$ mit dem Exponenten lim. p; daher hat man aus $\Delta f(x) = p\,\Delta x$ sogleich $d(fx) = \text{lim. } p \cdot dx$.

§. 120.

Nach den gegebenen Erklärungen ist also das Differentiale einer veränderlichen Größe x nichts anderes, als eine beliebige Veränderung von x, und die Bezeichnung mit d x zeigt nur den Zweck an, zu welchem diese Veränderung angenommen wurde; dem Werthe nach ist also d x mit Δ x einerley.

Hingegen ist das Differentiale einer Function f(x) der veränderlichen Größe x, oder d f(x) im Allgemeinen von Δ f(x) unterschieden; denn es ist Δ f(x) = p Δ x, aber d f(x) = lim. p. dx.

§. 121.

Da nach der Art, wie d f(x) durch d x bestimmt wird, d f(x) immer die Form eines Productes haben muß, wovon d x der eine, und die von d x unabhängige Größe lim. p der andere Factor ist; so heißt im Ausdrucke des Differentiales der Function, lim. p der Differential-Coefficient.

Jenachdem der Differential-Coefficient eine rationale oder irrationale, ganze oder gebrochene ꝛc. Function von x (§. 88. u. f.) ist, heißt auch das Differentiale der Function ein rationales oder irrationales ꝛc.

§. 122.

Wenn d x eine als Differentiale angenommene Veränderung der veränderlichen Größe x der Function f(x), und u eine Größe ist, welche von d x und der zugehörigen Veränderung Δ f(x) so abhängt, daß

1.) für jede beliebige Zahl m, $\frac{u}{m}$ aus u wird, wenn man $\frac{dx}{m}$ statt d x setzt, und daß

2.) der Exponent des Verhältnisses u : Δ f(x) die Einheit zur Grenze hat; so ist u = d f(x).

Wegen der ersten Voraussetzung ist nämlich die Größe des Verhältnisses d x : u, also dessen Exponent q unveränderlich, und mithin q von d x und u unabhängig; ferner ist u = q d x

und $\Delta f(x) = p \Delta x$ (§. 118.) $= p\, dx$ (§. 120.), also $\Delta f(x) = \frac{p}{q} u$. Aus diesem folgt, daß $\frac{p}{q}$ der Exponent des Verhältnisses $u : \Delta f(x)$ sey.

Mit dx wird sowohl u als $\Delta f(x)$ Null; daher hat der Exponent $\frac{p}{q}$ eine Grenze, und diese Grenze ist derjenige Werth des Bruches $\frac{p}{q}$, welcher mit $u = o$ zusammen gehört (§. 113.).

Bezeichnet lim. p den Werth von p für $dx = o$, so ist dieses auch der Werth von p für $u = o$; folglich ist lim. $\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\text{lim. p}}{q}$, weil q von u unabhängig ist.

Wegen der zweyten Voraussetzung hat man nun $\frac{\text{lim. p}}{q} = 1$, mithin $q = \text{lim. p}$, und daher $u = q\, dx = \text{lim. p. } dx = df(x)$ (§. 119.).

Kann man also eine Größe finden, welche der Veränderung der veränderlichen Größe proportional ist, und deren Verhältniß zur Veränderung der Function dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen kann; so ist diese Größe das Differentiale der Function.

§. 123.

Es sey y eine Function von x, x selbst aber wieder eine Function von v; p und q seyen die Exponenten der Verhältnisse $\Delta x : \Delta y$ und $\Delta v : \Delta x$, mithin $\Delta y = p \Delta x$ und $\Delta x = q \Delta v$; so ist auch $\Delta y = p q \Delta v$, also $dy = \text{lim. } (pq).\, dv$ (§. 119.).

Um lim. (pq) zu erhalten, muß jener Werth des Productes pq genommen werden, welcher mit $\Delta v = o$ zusammengehört. Da nun Δx mit Δv zugleich Null wird, und die Gleichungen $\Delta y = p \Delta x$ und $\Delta x = q \Delta v$ sich in $dy = \text{lim. p. } dx$ und $dx = \text{lim. q. } dv$ verwandeln, wobey lim. p und lim. q diejenigen Werthe von p und q sind, welche mit $\Delta x = o$ und $\Delta v = o$

zusammen gehören; so ist lim. (pq) = lim. p. lim. q; daher dy = lim. p. lim. q. dv. Eben denselben Werth für dy erhält man durch die Verbindung der Gleichungen dy = lim. p. dx und dx = lim. q. dv.

Wenn daher das Differentiale einer Function y einer veränderlichen Grösse x, die selbst wieder eine Function einer andern veränderlichen Grösse v ist, durch das Differentiale der letztern ausgedrückt werden soll; so kann zur Bestimmung von dy der durch dv bestimmte Werth von dx genommen werden, obschon in diesem Falle dx von △x unterschieden ist (§. 120.).

§. 124.

Das Differentiale einer Function mehrerer veränderlichen Grössen kann durch das Differentiale einer einzigen aus den veränderlichen Grössen ausgedrückt, nur dann angegeben werden, wenn die veränderlichen Grössen bekannte Functionen von einander sind; weil sich nur in diesem Falle die Veränderung der Function durch die Veränderung einer beliebigen veränderlichen Grösse ausdrücken läßt. Sind die veränderlichen Grössen unbestimmte Functionen von einander, so gibt man bloß an, wie das Differentiale der Function durch die Differentialen aller veränderlichen Grössen bestimmt wird.

§. 125.

Im Ausdrucke der Veränderung △y, welche eine Function y zweyer veränderlichen Grössen x und z leidet, wenn sich die letztern um △x und △z verändern, kann man jene Glieder, welche △x als Factor enthalten, als ein Product darstellen, wovon △x ein Factor ist; d. h. man kann die Summe dieser Glieder auf die Form p△x bringen, wobey p nicht nur eine Function von x und z, sondern auch von △x und △z seyn kann. Eben so kann man hierauf die Summe der Glieder, welche △z als Factor enthalten, auf die Form q△z bringen, und auch q kann eine Function von x, z, △x und △z seyn.

Außer $p \Delta x$ und $q \Delta z$ kann nun Δy nichts mehr enthalten, oder es ist $\Delta y = p \Delta x + q \Delta z$; denn enthielte Δy noch einen Theil r, so daß also $\Delta y = p \Delta x + q \Delta z + r$ wäre, so müßte, wenn man Δx und $\Delta z = o$ setzt, auch $r = o$ werden, weil für diesen Fall $\Delta y = o$ seyn muß.

Es wäre daher Δx oder Δz eine Wurzel der Gleichung $r = o$ (§. 39.), also r ein Product mit dem Factor Δx oder Δz (§. 40.), folglich schon in $p \Delta x$ oder $q \Delta z$ begriffen.

§. 126.

Wenn man annimmt, daß sich bloß x verändere, die zugehörige Veränderung von y mit $\Delta' y$, und den Werth von p für $\Delta z = o$ mit p' bezeichnet, so ist $\Delta' y = p' \Delta x$; mithin $d' y = \text{lim.}\, p' . d x$ (§. 119.).

Ist aber $\Delta'' y$ die Veränderung von y, wenn sich z allein verändert, und q' der Werth von q für $\Delta x = o$, so ist $\Delta'' y = q' \Delta z$; daher $d'' y = \text{lim.}\, q' . dz$.

Da man p' aus p erhält, wenn man $\Delta z = o$ setzt, und $\text{lim.}\, p'$ aus p', wenn $\Delta x = o$ gesetzt wird (§. 113.); so wird $\text{lim.}\, p'$ sogleich aus p gefunden, wenn man in p sowohl Δx als $\Delta z = o$ setzt. Eben so findet man $\text{lim.}\, q'$ aus q.

§. 127.

Sind x und z Functionen von einander, so ist Δz durch Δx, und folglich das Verhältniß $\Delta x : \Delta z$ bestimmt.

Wenn s den Exponenten desselben bezeichnet, so ist $\Delta z = s \Delta x$, mithin $\Delta y = p \Delta x + q s \Delta x = (p + q s) \Delta x$, also $d z = \text{lim.}\, s . d x$, und $d y = \text{lim.}\, (p + q s) . d x$.

Nun erhält man $\text{lim.}\, (p + q s)$, wenn man in p, q und s, $\Delta x = o$ setzt; da aber mit Δx auch $\Delta z = o$ wird, weil Δx und Δz nicht von einander unabhängig sind, so sind die mit $\Delta x = o$ zusammen gehörigen Werthe von p, q und s; $\text{lim.}\, p'$, $\text{lim.}\, q'$ (§. 126.) und $\text{lim.}\, s$; mithin ist $dy = \text{lim.}\, p' . dx + \text{lim.}\, q' . \text{lim.}\, s . d x = \text{lim.}\, p' . d x . + \text{lim.}\, q' . d z = d' y + d'' y$ (§. 126.).

Wenn man also das Differentiale einer Function zweyer veränderlichen Grössen zuerst so bestimmt, als ob die eine, und dann, als ob die andere veränderliche Grösse beständig wäre; so gibt die Summe dieser Differentialen das Differentiale der Function durch die Differentialen der veränderlichen Grössen ausgedrückt.

Auf ähnliche Weise findet man, daß das Differentiale einer Function von mehr als zwey veränderlichen Grössen gefunden werde, wenn man für jede einzelne veränderliche Grösse alle übrigen als beständig betrachtet, und die Summe aller auf diese Art bestimmten Differentialen nimmt.

Das Differentiale einer Function $f(x, y \ldots)$ mehrerer veränderlichen Grössen $x, y \ldots$ bezeichnet man mit $\frac{f(x, y \ldots)}{dx} dx$, wenn nur x allein als veränderlich betrachtet wird; eben so bezeichnet man das Differentiale einer solchen Function mit $\frac{f(x,y \ldots)}{dy} dy$, wenn man y allein als veränderlich annimmt u. s. w.

§. 128.

Wenn das Differentiale einer Function y von mehrern veränderlichen Grössen v, x ꝛc. durch die Differentialen der letztern ausgedrückt ist, und man verlangt den Werth von dy für den Fall, wenn man einer von den veränderlichen Grössen, z. B. v einen beständigen Werth beylegt, so erhält man diesen Werth von dy, wenn man in dy, $dv = o$ setzt, denn dadurch verschwindet derjenige Theil von dy, welcher durch die Veränderung von v hervorgebracht wurde.

§. 129.

Das Differentiale einer Function durch die Differentialen ihrer veränderlichen Grössen angeben, heißt die Function differentiiren.

II. Abschnitt.

Von den Differentialen der Functionen, wenn die Art der Verbindung zwischen den veränderlichen und beständigen Größen derselben gegeben ist, oder von den Grundregeln der Differential-Rechnung.

§. 130.

Es sey $f(x) = a \pm b x$, so ist $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a \pm b (x + \Delta x) - (a \pm b x) = \pm b \Delta x$; mithin $p = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (§. 118.) $= \pm b$.

Daraus folgt lim. $p = \pm b$; daher hat man $d f(x) = d(a \pm b x) = \pm b\, dx$.

Das gefundene Differentiale zeigt, daß

1.) die beständigen Glieder einer Function in ihrem Differentiale verschwinden, daß

2.) die veränderlichen ihr vorgesetztes Zeichen auch im Differentiale behalten, und daß

3.) das Differentiale eines Productes aus einem beständigen und einem veränderlichen Factor gefunden werde, wenn man den beständigen Factor mit dem Differentiale des veränderlichen multiplicirt.

Es ist also

$d(a + x \pm y) = dx \pm dy$ (§. 127.)

und $d(x \pm y) = dx \pm dy$; also haben

4.) Größen, deren Differenz beständig ist, einerley Differentiale, und

5.) das Differentiale einer Summe oder Differenz veränderlicher Glieder ist die Summe oder Differenz der Differentialen dieser Glieder.

§. 131.

Es sey $f(x, y) = xy$; so ist $\frac{d(xy)}{dy} dy = x\,dy$, und $\frac{d.(xy)}{dx} dx = y\,dx$ (§. 130. nro. 3.); mithin ist $d(xy) = x\,dy + y\,dx$ (§. 127.). D. h. das Differentiale eines Productes zweyer veränderlichen Factoren wird gefunden, wenn man jeden Factor mit dem Differentiale des andern multiplicirt, und die Producte addirt.

Eben so ist $d(xyz) = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$, und überhaupt $d(xy \ldots uv) = (xy \ldots u)\,dv + (xy \ldots v)\,du + \ldots + (x \ldots uv)\,dy + (y \ldots uv)\,dx$.

Daher ist das Differentiale eines Productes mehrerer veränderlichen Factoren der Summe der Producte aus dem Differentiale eines jeden einzelnen Factors mit dem Producte aller übrigen Factoren gleich.

Nach den bisherigen Regeln ist z. B.

$$\begin{aligned} &d[a + (b - cx)\,y - bx] \\ &= (b - cx)\,dy + y\,d(b - cx) - b\,dx \\ &= (b - cx)\,dy - cy\,dx - b\,dx \\ &= (b - cx)\,dy - (b + cy)\,dx. \end{aligned}$$

§. 132.

Da $\frac{x}{a} = \frac{1}{a} x$, so ist $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} dx$ (§. 130. nro. 3.) $= \frac{dx}{a}$; also findet man das Differentiale eines Bruches, dessen Renner beständig ist, wenn man das Differentiale des Zählers durch den Renner dividirt.

§. 133.

Wenn $f(x) = \frac{a}{x}$, so ist $\Delta f(x) = \frac{a}{x+\Delta x} - \frac{a}{x}$ $= -\frac{a\Delta x}{(x+\Delta x)x}$. Daraus folgt $p = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{a}{(x+\Delta x)x}$; mithin ist lim. $p = -\frac{a}{x^2}$ und $df(x) = d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{adx}{x^2}$.

Man multiplicire also, um das Differentiale eines Bruches zu erhalten, dessen Zähler beständig ist, den Zähler mit dem Differentiale des Nenners, dividire das Product durch das Quadrat des Nenners, und gebe dem Quotienten das entgegengesetzte Zeichen.

§. 134.

Für $f(x, y) = \frac{x}{y}$ hat man $\frac{d(x:y)}{dx} dx = \frac{dx}{y}$ (§. 132.) und $\frac{d(x:y)}{dy} dy = -\frac{xdy}{y^2}$ (§. 133.); daher ist (§. 127.) $d\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; nämlich:

Das Differentiale eines Bruches, dessen Zähler und Nenner veränderlich sind, wird gefunden, wenn man vom Producte des Nenners mit dem Differentiale des Zählers das Product des Zählers mit dem Differentiale des Nenners abzieht, und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt.

§. 135.

Aus $f(x) = x^m$ folgt $\Delta f(x) = (x + \Delta x)^m - x^m = x^m$ $+ \frac{m}{1} x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots - x^m$ (§. 10.)

$= \left(\frac{m}{1} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \ldots\right) \Delta x.$

Es ist also $p = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{m}{1} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \ldots$; folglich ist lim. $p = m x^{m-1}$, weil alle folgenden Glieder Null werden, wenn $\Delta x = 0$ ist. Mithin ist $d f(x) = d. x^m = m x^{m-1} d x$.

Das Differentiale einer Potenz einer veränderlichen Größe, deren Exponent beständig ist, erhält man also, wenn man — 1 zum Exponenten addirt, und die auf solche Art veränderte Potenz mit dem Producte aus dem gegebenen Exponenten und dem Differentiale der veränderlichen Größe multiplicirt.

Nach dieser Regel können auch die Differentialen von Wurzelgrößen gefunden werden, weil sich Wurzelgrößen immer auf die Form von Potenzen mit gebrochenen Exponenten bringen lassen.

Beyspiele.

$d. \frac{1}{6} a x^2 = \frac{1}{6} a \times d. x^2$ (§. 130. nro. 3.) $= \frac{1}{6} a . 2 x d x$
$= \frac{1}{3} a x d x$;

$d(x y^5 - a x^{-5}) = d. x y^5 - d. a x^{-6}$ (§. 130. nro. 5.) $=$
$x d. y^5 + y^5 d x - a d. x^{-5}$ (§. 131.) $= 5 x y^4 d y + y^5 d x$
$+ 5 a x^{-6} d x = 5 x y^4 d y + (y^5 + 5 a x^{-6}) d x$;

$d. \sqrt[3]{x^2} = d. x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} d x = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} d x$;

$d. (1 + x^2)^3 = 3 (1 + x^2)^2 \times d (1 + x^2)$ [weil hier $1 + x^2$ ist, was vorhin x war, (man vergleiche §. 123.)] $= 3 (1 + x^2)^2$
$d. x^2$ (§. 130. nro. 4.) $=$
$3 (1 + x^2)^2 . 2 x d x = 6 x d x (1 + x^2)^2$;

$d. \sqrt{a^3 - x^3} = d. (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (a^2 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \times d (a^3 - x^3)$
$= \frac{1}{2} (a^3 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \times - d. x^3 = \frac{1}{2} (a^3 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \times - 3 x^2 d x$
$= - \frac{3}{2} x^2 d x (a^3 - x^3)^{-\frac{1}{2}}$.

§. 136.

Potenzen mit veränderlichen Exponenten heißen Exponential-Größen.

Es sey $f(x) = b^x$, also $f(x)$ eine veränderliche Potenz einer beständigen Größe, so ist $\Delta f(x) = b^{x+\Delta x} - b^x = b^x (b^{\Delta x} - 1)$, mithin $p = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{b^x (b^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$.

Nun wird, wenn man $\Delta x = 0$ setzt, $b^{\Delta x} = 1$; da sich aber $b^{\Delta x}$ mit Δx verändert, so setze man, um den Unterschied zwischen $b^{\Delta x}$ und 1 bey jedem Werthe von Δx zu finden, $b = 1 + a$; dann ist

$$b^{\Delta x} = (1+a)^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{1} a + \frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.2} a^2 + \ldots + \frac{\Delta x(\Delta x-1)\ldots[\Delta x-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{n-1} + \ldots$$

(§. 10.), folglich

$$b^{\Delta x} - 1 = \left\{ a + \frac{(\Delta x-1)}{1.2} a^2 + \ldots + \frac{(\Delta x-1)\ldots[\Delta x-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} a^n + \ldots \right\} \Delta x,$$

wenn n nunmehr die Stellenzahl der Glieder dieser Reihe bezeichnet, welche mit dem zweyten Gliede der vorhergehenden anfängt.

Mithin ist

$$p = b^x \left\{ a + \frac{(\Delta x-1)}{1.2} a^2 + \ldots + \frac{(\Delta x-1)\ldots[\Delta x-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} a^n + \ldots \right\},$$

und daher

$$\lim. p = b^x \left(a - \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{3} a^3 - \ldots \pm \frac{1}{n} a^n \mp \ldots\right)$$

$$= b^x [(b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \tfrac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots \pm \frac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots];$$

denn es wird für $\Delta x = 0$,

$$\frac{(\Delta x-1)(\Delta x-2)\ldots[\Delta x-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} = \frac{-1\times-2\times-3\times\ldots\times-(n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n} = \frac{1}{n}$$

und positiv, wenn n ungerade, negativ aber, wenn n gerade ist; weil der Zähler im ersten Falle ein Product aus einer geraden, und im zweyten aus einer ungeraden Anzahl negativer Factoren ist.

Endlich ist wegen $d f(x) = \lim. p . dx$,

$$d.b^x = b^x dx\,[(b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \tfrac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots \mp \tfrac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots]$$

§. 137.

Wenn $f(x) = \log. x$ ist, und b die Grundzahl bezeichnet, so ist $b^{\log.x} = x$, also $dx = d . b^{\log.x}$

$$= b^{\log.x}\, d.\log. x.[(b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots \mp \tfrac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots]$$

$$(\S.\ 136.) = x\, d.\log. x.[(b-1) - \ldots \mp \tfrac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots];$$

$$\text{mithin } d.\log. x = \frac{1}{(b-1) - \ldots \mp \frac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{Mdx}{x} = M x^{-1} dx, \text{ wenn man Kürze halber}$$

$$\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots \mp \frac{1}{n}(b-1)^n \mp \ldots} \text{ mit M bezeichnet.}$$

Man findet also das Differentiale des Logarithmus einer veränderlichen Zahl, wenn man das Differentiale der Zahl durch die Zahl selbst dividirt, und den Quotienten mit der beständigen, durch die Grundzahl b allein bestimmten Zahl

$$M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots} \text{ multiplicirt.}$$

Beyspiele.

$$d.\log.(1+x^2) = \frac{Md.(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2Mxdx}{1+x^2} \quad (\S.\ 135.).$$

$$d.\log.(x^m y^q) = d(m\log.x + q\log.y)$$
$$= m\,d.\log.x + q\,d.\log.y\ (\S.\ 130.)$$
$$= \frac{Mmdx}{x} + \frac{Mqdy}{y}$$
$$= M\left(\frac{mdx}{x} + \frac{qdy}{y}\right).$$

$$d.\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = d\,[\log.(1+x) - \log.(1-x)]$$
$$= d.\log.(1+x) - d\log.(1-x)$$
$$= \frac{Md(1+x)}{1+x} - \frac{Md(1-x)}{1-x}$$
$$= \frac{Mdx}{1+x} + \frac{Mdx}{1-x}$$
$$= \frac{2Mdx}{1-x^2}.$$

$$d.\log.\sqrt{2ax-x^2} = d.\tfrac{1}{2}\log.(2ax-x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,d.\log.(2ax-x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}M.\frac{d(2ax-x^2)}{2ax-x^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}M.\frac{2adx - 2xdx}{2ax-x^2}$$
$$= \frac{Mdx(a-x)}{x(2a-x)}.$$

§. 138.

Aus $d.\log.x = \frac{1}{(b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\ldots.} \cdot \frac{dx}{x}$ folgt

$dx = [(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots]\,x\,d.\log.x = \frac{1}{M}x\,d.\log.x$

(§. 137.); d. h. man findet das Differentiale ei-

ner veränderlichen Größe, wenn man das Product derselben mit dem Differentiale ihres Logarithmus, durch M dividirt.

Durch Hülfe dieses Satzes lassen sich auch solche Exponential-Größen differentiiren, welche Potenzen veränderlicher Größen sind; denn es ist, wenn man $x = y^v$ setzt,

$$d.y^v = \frac{1}{M} y^v \, d.\log.(y^v) = \frac{1}{M} y^v \, d(v \log. y)$$

$$= \frac{1}{M} y^v (v \, d.\log. y + \log. y . d v) \text{ (§. 131.)}$$

$$= \frac{1}{M} y^v \left(M \frac{v dy}{y} + \log. y . d v \right) \text{ (§. 137.)}$$

$$= y^v \left(\frac{v dy}{y} + \frac{\log. y . dv}{M} \right).$$

§. 139.

Wenn eine Function $f(x, y)$ zweyer veränderlichen Größen x, y, beständig $= o$ seyn soll, so ist durch die Gleichung $f(x, y) = o$ für jede beliebig angenommene Veränderung Δx die zugehörige Veränderung Δy bestimmt; denn es muß für die zusammen gehörigen Werthe $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ der veränderlichen Größen die Gleichung: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = o$ Statt haben.

Man hat also $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = o$, und mithin auch $d f(x, y) = o$.

Nun kann jede Gleichung, welche zwey veränderliche Größen enthält, auf Null, mithin auf die Form $f(x, y) = o$ gebracht werden; also wird das Differentiale einer Größe y, welche eine verwickelte Function (§. 86.) einer veränderlichen Größe x ist, gefunden, wenn man die zwischen x und y bestehende Gleichung zuerst auf Null bringt, dann so differentiirt, daß man zuerst die eine, und hierauf die andere veränderliche Größe als beständig annimmt (§. 127.), die Summe dieser Differentialen $= o$ setzt, und endlich daraus dy entwickelt.

Auf ähnliche Art erhält man auch das Differentiale einer verwickelten Function mehrerer veränderlichen Größen durch die Differentialen der letztern ausgedrückt.

Es ist z. B. aus $\frac{1}{x+2y} = xy - y^2$,

$2y^3 - xy^2 - x^2y + 1 = 0$, und man erhält, wenn man beym Differentiiren zuerst y und dann x als beständig annimmt, die Ausdrücke: $-y^2\,dx - 2xy\,dx$ und $6y^2\,dy - 2xy\,dy - x^2\,dy$; folglich ist $(6y^2 - 2xy - x^2)\,dy - (y^2 + 2xy)\,dx = 0$, und daraus $dy = \frac{(y^2+2xy)\,dx}{6y^2-2xy-x^2}$.

III. Abschnitt.

Von den Differentialen der höhern Ordnungen.

---

§. 140.

Wenn $p = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (§. 118.) selbst wieder eine Function von x ist, so wird $\Delta f(x)$ nicht bloß durch Δx, sondern auch durch x bestimmt; bey einerley Werth von Δx und bey verschiedenen Werthen von x erhält also $\Delta f(x)$ verschiedene Werthe.

Man setze, x verändere sich in p wieder um Δx, und die zugehörigen Veränderungen von p und $\Delta f(x)$ seyen Δp und $\Delta . \Delta f(x)$ (wofür man der Kürze wegen $\Delta^2 f(x)$ schreibt); so ist aus $\Delta f(x) = p \Delta x$, $\Delta f(x) + \Delta^2 f(x) = (p + \Delta p)\,\Delta x$, also $\Delta^2 f(x) = \Delta p\,\Delta x$, und, wenn der Exponent des Verhältnisses $\Delta x : \Delta p$ mit q bezeichnet wird, $\Delta p = q \Delta x$, folglich $\Delta^2 f(x) = q \Delta x^2$.

Ist q noch eine Function von x, so muß sich mit der Veränderung von x auch $\Delta^2 f(x)$ verändern. Die Veränderung von x sey wieder $= \Delta x$, und die zugehörigen Veränderungen von q und $\Delta^2 f(x)$ seyen Δq und $\Delta . \Delta^2 f(x)$ oder kürzer $\Delta^3 f(x)$, so ist

$\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x) = (q + \Delta q) \Delta x^2$, also $\Delta^3 f(x) = \Delta q \Delta x^2$ oder $\Delta^3 f(x) = r \Delta x^3$, wenn r den Exponenten des Verhältnisses $\Delta x : \Delta q$ anzeigt.

Eben so, wie aus der Veränderung $\Delta f(x)$ eine der zweyten Ordnung $\Delta^2 f(x)$, und aus dieser eine der dritten, $\Delta^3 f(x)$ abgeleitet wurde, läßt sich aus der letzten eine der vierten Ordnung herleiten, wenn r noch eine Function von x ist, u. s. f.

§. 141.

Wenn man das bisher angewandte Verfahren beybehält, so erhält man jede von diesen Veränderungen als ein Product ausgedrückt, wovon jene Potenz von Δx ein Factor ist, deren Exponent die Ordnung der Veränderung angibt; denn wenn für irgend eine ganze positive Zahl n, $\Delta^n f(x) = p \Delta x^n$ ist, so folgt daraus $\Delta^n f(x) + \Delta . \Delta^n f(x)$ oder $\Delta^n f(x) + \Delta^{n+1} f(x) = (p + \Delta p) \Delta x^n$, und $\Delta^{n+1} f(x) = \Delta p \Delta x^n$, also bey der Bezeichnung des, dem Verhältnisse $\Delta x : \Delta p$ zugehörigen Exponenten mit q,

$$\Delta^{n+1} y = q \Delta x^{n+1}.$$

Nun hat vermöge der vorhergehenden Induction die Veränderung $\Delta^n f(x)$ die Form $p \Delta x^n$, wenn $n = 3$ ist (§. 140.); also kömmt ihr diese Form auch zu, wenn $n = 4$ ist; aus diesem für $n = 5$ u. s. w.; mithin für jede ganze Zahl n.

Ist in einer Veränderung von irgend einer Ordnung der Coefficient p keine Function von x, so sind die Veränderungen von allen höhern Ordnungen $= 0$.

§. 142.

Bey jeder Veränderung von der Form $\Delta^n f(x) = p \Delta x^n$ hat der Exponent p des Verhältnisses $\Delta x^n : \Delta^n f(x)$ eine Grenze,

weil mit Δx^n auch $\Delta^n f(x)$ Null wird (§. 114.). Nimmt man wieder an, diese Grenze sey bey jedem Werthe von Δx der Exponent des Verhältnisses $\Delta x^n : \Delta^n f(x)$, so heißt der nach dieser Hypothese bestimmte Werth von $\Delta^n f(x)$ das n^{te} Differentiale von $f(x)$, oder das Differentiale dieser Function von der n^{ten} Ordnung, und es ist daher $d^n f(x) = \text{lim. p. } dx^n$.

§. 143.

In $\Delta^n f(x) = p \Delta x^n$ sey p' der Werth von p für $\Delta x = o$, und $p - p' = P$, so wird mit Δx auch P Null, und der Exponent q des Verhältnisses $\Delta x : P$ hat eine Grenze. Da nach dieser Bezeichnung, $P = q \Delta x$ und $p = p' + P = p' + q \Delta x$ ist, so wird

$\Delta^n f(x) = (p' + q \Delta x) \Delta x^n$.

Es werde $p' + \Delta p'$ aus p', und $q + \Delta q$ aus q, wenn sich x wieder um Δx verändert, so bekömmt man

$\Delta^{n+1} f(x) = (p' + \Delta p' + q \Delta x + \Delta q \Delta x) \Delta x^n -$
$(p' + q \Delta x) \Delta x^n = (\Delta p' + \Delta q \Delta x) \Delta x^n$ (§. 116.), oder wenn der Exponent des Verhältnisses $\Delta x : \Delta p'$, r heißt, und mithin $\Delta p' = r \Delta x$ ist,

$\Delta^{n+1} f(x) = (r + \Delta q) \Delta x^{n+1}$; daraus ist

$d^{n+1} f(x) = \text{lim. } (r + \Delta q). d x^{n+1}$ (§. 142.).

Aus $\Delta p' = r \Delta x$ folgt nun $d p' = \text{lim. r. } d x$, wobey lim. r der Werth von r für $\Delta x = o$ ist, und für $\Delta x = o$ ist auch $\Delta q = o$; daher ist $\text{lim. } (r + \Delta q) = \text{lim. r} = \frac{d p'}{d x}$, und folglich $d^{n+1} f(x) = d p'. d x^n$.

Aus $\Delta^n f(x) = p \Delta x^n$ ist aber $d^n f(x) =$
$\text{lim. p } d x^n = p' d x^n$, weil p' der Werth von p für $\Delta x = o$ ist, und man erhält daraus, wenn man so differentiirt, daß man dabey $d x$ als beständige Größe betrachtet, d. $d^n f(x) = d p' d x^n$ (§. 130. nro. 3.); mithin ist $d^{n+1} f(x) = d. d^n f(x)$.

Man findet also aus einem Differentiale einer Function einer veränderlichen Größe, von was immer für einer Ordnung das der nächst höhern Ordnung, wenn man das erstere noch ein Mal differentiirt, dabey aber das Differentiale der veränderlichen Größe als beständige Größe nimmt.

Dabey liegt aber die Voraussetzung zum Grunde, daß die Veränderungen $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ ꝛc. aus gleichen auf einander folgenden Veränderungen der veränderlichen Größe x entstehen.

So ist z. B.

$d.\ (a-x)^4 = -4\,dx\,(a-x)^3$ (§. 135.);

$d^2.\ (a-x)^4 = d.\,d\,(a-x)^4 = d.\,-4\,dx\,(a-x)^3$

$= +3.4\,dx^2\,(a-x)^2$;

$d^3.\ (a-x)^4 = d.\,d^2\,(a-x)^4 = d.\,3.4\,dx^2\,(a-x)^2$

$= -2.3.4\,dx^3\,(a-x)$;

$d^4.\ (a-x)^4 = d.\,d^3\,(a-x)^4 = d.\,-2.3.4\,dx^3\,(a-x)$

$= +1.2.3.4\,dx^4$;

$d^5\,(a-x)^5 = 0$ (§. 130. nro. 1.).

Ferner ist $d.\log.x = Mx^{-1}\,dx$ (§. 137.); also

$d^2 \log.x = d\,Mx^{-1}\,dx = -Mx^{-2}\,dx^2$;

$d^3 \log.x = d.\,-Mx^{-2}\,dx^2 = +2Mx^{-3}\,dx^3$; ꝛc.

§. 144.

Es sey in $f(x)$ die veränderliche Größe x selbst wieder eine Function der veränderlichen Größe v, und der Werth von $d^2 f(x)$ zu finden, wenn $\Delta^2 f(x)$ durch gleiche Veränderungen von v, und mithin durch die damit zusammen gehörigen ungleichen Veränderungen von x bestimmt wird.

Man bezeichne der Kürze wegen die Grenzen der Exponenten, welche den Verhältnissen $\Delta x : \Delta f(x)$ und $\Delta v : \Delta x$ zugehören, mit p und q, so ist $df(x) = p\,dx$ und $dx = q\,dv$, also $df(x) = pq\,dv$ (§. 123.); mithin ist $d^2 f(x) = d(pq).dv$ (§. 143.) $= (p\,dq + q\,dp)\,dv$ (§. 131.) $= p\,dq\,dv + dp.q\,dv$.

Aus $dx = q\,dv$ ist aber $d^2x = dq\,dv$ (§. 143.); folglich wird $d^2 f(x) = p\,d^2x + dp\,dx$.

Es ist nun $p\,d^2x + dp\,dx$ das Differentiale von $p\,dx$, wenn p sowohl als dx veränderlich ist (§. 131.); daher erhält man das zweyte Differentiale einer Function $f(x)$ einer veränderlichen Größe x, welche selbst eine Function einer andern veränderlichen Größe ist, und deren Veränderungen durch gleiche Veränderungen der letztern bestimmt werden, wenn man ihr Differentiale $df(x)$ noch ein Mal und zwar dergestalt differentiirt, daß man nicht nur x, sondern auch dx als veränderlich betrachtet.

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß für solche Functionen überhaupt $d^{n+1} f(x) = d.\,d^n f(x)$ sey, wenn man beym Differentiiren alle in $d^n f(x)$ vorkommenden Differentialen von x, von welcher Ordnung sie seyn mögen, als veränderliche Größen annimmt.

So ist für $f(x) = \log. x$, $df(x) = M x^{-1} dx$;
$d^2 f(x) = M(x^{-1} d^2 x - x^{-2} dx^2)$; $d^3 f(x) =$
$M(x^{-1} d^3 x - x^{-2} dx\,d^2x - 2x^{-2} dx\,d^2x + 2x^{-3} dx^3) =$
$M(x^{-1} d^3 x - 3x^{-2} dx\,d^2x + 2x^{-3} dx^3)$.

Wäre nun z. B. $x = \sqrt{1+v^2} = (1+v^2)^{\frac{1}{2}}$, so fände man $dx = v\,dv(1+v^2)^{-\frac{1}{2}}$, und nach §. 143., $d^2x = (1+v^2)^{-\frac{3}{2}} dv^2$, $d^3x = -3\,v\,dv^3(1+v^2)^{-\frac{5}{2}}$.

Durch Substitution dieser Werthe würde also $d^3 f(x) = d^3 \log. x = d^3 \log. \sqrt{1+v^2} =$
$2M v\,dv^3 (v^2 - 3)(1+v^2)^{-3}$, welchen Ausdruck man auch erhält, wenn man $d^3 \log. \sqrt{1+v^2}$ unmittelbar nach §. 143. sucht.

§. 145.

Wenn eine Function mehrerer veränderlichen Größen x, y, z..., welche selbst Functionen von einander sind, auch Differen-

tialen dieser Größen von was immer für einer Ordnung enthält, so können sie diese Differentialen auf gleiche Veränderungen von einer aus den veränderlichen Größen, z. B. von x beziehen; dann ist d x für die Bestimmung des Differentiales dieser Function beständig (§. 143.), und es können außer d x keine höhern Differentialen von x zum Vorschein kommen; alle Differentialen der übrigen veränderlichen Größen hingegen sind veränderlich (§. 144.).

Wenn aber alle veränderlichen Größen x, y, z ... Functionen einer andern Größe v sind, welche im Ausdrucke der Function nicht vorkömmt, und sich die Differentialen der erstern auf gleiche Veränderungen von v beziehen, so sind alle Differentialen von x, y, z ... veränderlich.

IV. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der veränderten Werthe der Functionen mit Einer veränderlichen Größe.

---

§. 146.

Es sey y der Werth einer Function beym Werthe x der veränderlichen Größe, Δy die Veränderung von y, $\Delta^2 y$ die von Δy, $\Delta^3 y$ die von $\Delta^2 y$ u. s. f., wenn sich x um Δx verändert.

Dann ist beym Werthe $x + \Delta x$ der veränderlichen Größe der Werth der Function $= y + \Delta y$.

Beym Werthe $x + 2\Delta x$ der erstern ist der Werth der Func-

ion $= y + 2\Delta y + \Delta^2 y$; denn in $y + \Delta y$ wird, wenn sich x um Δx verändert, $y + \Delta y$ aus y, und $\Delta y + \Delta^2 y$ aus Δy; folglich $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$ aus $y + \Delta y$.

Verändert sich x wieder um Δx, so wird aus $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, $(y + \Delta y) + 2(\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta^2 y + \Delta^3 y) = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$, welches also der Werth der Function beym Werthe $x + 3\Delta x$ der veränderlichen Größe ist.

Bey nochmaliger Veränderung der Größe x um Δx, also beym Werthe $x + 4\Delta x$ dieser Größe erhält daher die Function den Werth $(y + \Delta y) + 3(\Delta y + \Delta^2 y) + 3(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + (\Delta^3 y + \Delta^4 y) = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$.

Wenn nun überhaupt für den Werth $x + m\Delta x$ der veränderlichen Größe der zugehörige Werth der Function

$$= y + \frac{m}{1}\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-4)]}{1.2.3\ldots(n-3)}\frac{[m-(n-3)]}{(n-2)}\Delta^{n-2} y$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-2)}\frac{[m-(n-2)]}{(n-1)}\Delta^{n-1} y + \ldots$$

hält, wenn x wieder um Δx zunimmt, also für $x + (m+1)\Delta x$ die Function den Werth:

$$(y + \Delta y) + \frac{m}{1}(\Delta y + \Delta^2 y) + \frac{m(m-1)}{1.2}(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\Delta^3 y + \Delta^4 y) + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-4)][m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)}(\Delta^{n-2} y + \Delta^{n-1} y)$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-3)][m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-2)(n-1)}(\Delta^{n-1} y + \Delta^n y) + \ldots$$
$$= y + \Delta y + \frac{m}{1}\Delta y + \frac{m}{1}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-4)][m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)}\Delta^{n-1} y$$

$$+\frac{m\,(m-1)\ldots[m-(n-3)]\,[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)}\Delta^{n-1}y+\ldots$$

$$=y+\frac{(m+1)}{1}\Delta y+\left\{\frac{m}{1}+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\right\}\Delta^2 y$$

$$+\left\{\frac{m\,(m-1)}{1.2}+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\right\}\Delta^3 y+\ldots$$

$$+\left\{\frac{m\,(m-1)\ldots[m-(n-4)]\,[m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-3)\,(n-2)}\right.$$

$$\left.+\frac{m\,(m-1)\ldots[m-(n-3)]\,[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)}\right\}\Delta^{n-1}y+\ldots.$$

$$=y+\frac{(m+1)}{1}\Delta y+\left\{\frac{2+(m-1)}{1.2}\right\}m\,\Delta^2 y$$

$$+\left\{\frac{3+(m-2)}{1.2.3}\right\}m\,(m-1)\,\Delta^3 y+\ldots$$

$$+\left\{\frac{(n-1)+[m-(n-2)]}{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)}\right\}m\,(m-1)\ldots[m-(n-3)]\,\Delta^{n-1}y+\ldots$$

$$=y+\frac{(m+1)}{1}\Delta y+\frac{(m+1)\,m}{1.2}\Delta^2 y+\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.2.3}\Delta^3 y+\ldots$$

$$+\frac{(m+1)\,m\,(m-1)\ldots[m-(n-3)]}{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)}\Delta^{n-1}y+\ldots.$$

Wenn also der durch $x+m\,\Delta x$ bestimmte Werth der Function $=y+\frac{m}{1}\Delta y+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\Delta^2 y+\ldots$ bey irgend einem Werthe von m ist, so gibt dieser Ausdruck den Werth der Function auch dann an, wenn statt m eine um Eins größere Zahl gesetzt wird.

Der vorhergehenden Induction zu Folge ist der Werth der Function, $=y+\frac{m}{1}\Delta y+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\Delta^2 y+\ldots$, wenn $m=4$ ist; also gibt diese Formel auch ihren Werth für $m=5$, aus diesem für $m=6$ u. s. f.; mithin allgemein für jede ganze positive Zahl m.

§. 147.

Es seyen p, q, r . . . die Exponenten der Verhältnisse $\Delta x:\Delta y$, $\Delta x^2:\Delta^2 y$, $\Delta x^3:\Delta^3 y$ ꝛc., so ist $\Delta y=p\,\Delta x$, $\Delta^2 y=q\,\Delta x^2$,

$\Delta^3 y = r \Delta x^3 \ldots$; folglich ist bey dem Werthe $x + m \Delta x$ der veränderlichen Größe der Werth der Function oder $f(x + m \Delta x)$ [wenn man statt y wie gewöhnlich $f(x)$ schreibt,] $=$

$$f(x) + \frac{m}{1} p \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} q \Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} r \Delta x^3$$

$+ \ldots$ (§. 146.)

$$= f(x) + \frac{m \Delta x}{1} p + \frac{m \Delta x}{1} \left(\frac{m \Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) q$$

$$+ \frac{m \Delta x}{1} \left(\frac{m \Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\frac{m \Delta x}{3} - \frac{2 \Delta x}{3} \right) r + \ldots,$$

oder, wenn man die gesammte Veränderung der veränderlichen Größe, nämlich $m \Delta x$ mit u bezeichnet,

$$f(x + m \Delta x) = f(x + u) = f(x) + \frac{u}{1} p + \frac{u}{1} \left(\frac{u}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) q$$

$$+ \frac{u}{1} \left(\frac{u}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\frac{u}{3} - \frac{2 \Delta x}{3} \right) r + \ldots$$

§. 148.

Die Werthe der Zahlen p, q, r ..., welche dieselben für $\Delta x = o$ erhalten, bezeichne man mit p', q', $r' \ldots$, und die Unterschiede $p - p'$, $q - q'$, $r - r' \ldots$ mit p'', q'', $r'' \ldots$; so ist $p = p' + p''$, $q = q' + q''$, $r = r' + r'' \ldots$, und es wird

$$f(x + m \Delta x) = f(x + u) = f(x) + \frac{u}{1} (p' + p'')$$

$$+ \frac{u}{1} \left(\frac{u}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) (q' + q'') + \frac{u}{1} \left(\frac{u}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\frac{u}{3} - \frac{2 \Delta x}{3} \right)$$

$(r' + r'') + \ldots$

Verrichtet man nun bey jedem Gliede dieser Reihe die angezeigten Multiplicationen, so werden die ersten Glieder der Producte der Ordnung nach die von Δx unabhängigen Größen $\frac{u}{1} p'$, $\frac{u^2}{1.2} q'$, $\frac{u^3}{1.2.3} r' \ldots$, und man hat, wenn man die Summe aller übrigen Glieder dieser Producte mit S bezeichnet,

$$f(x + u) = f(x) + \frac{u}{1} p' + \frac{u^2}{1.2} q' + \frac{u^3}{1.2.3} r' + \ldots + S.$$

Diese Summe S kann nun bey verschiedenen Werthen von Δx keine verschiedenen Werthe haben; denn da $\Delta x = \frac{u}{m}$ ist, und für m jede ganze Zahl gesetzt werden kann, so kann, ohne daß u verändert wird, Δx beliebig unterschiedene Werthe haben; bey unverändertem x und u bleiben aber $f(x+u)$, $f(x)$, p', q', r'... unverändert, also muß dieses auch der Fall bey S seyn.

S kann auch keine bey jedem Werthe von Δx unverändert bleibende Größe a seyn, denn man hätte für $\Delta x = o$, auch $u = o$ und $f(x+o) = f(x) + a$, welches unmöglich ist.

Folglich ist $S = o$, und mithin

$$f(x+u) = f(x) + \frac{u}{1} p' + \frac{u^2}{1.2} q' + \frac{u^3}{1.2.3} r' + \ldots$$

§. 149.

Da Δy oder $\Delta f(x) = p \Delta x$, $\Delta^2 y$ oder $\Delta^2 f(x) = q \Delta x^2$, $\Delta^3 y$ oder $\Delta^3 f(x) = r \Delta x^3$ u. s. f. ist, so folgt daraus $d f(x) = \text{lim. } p. d x$, $d^2 f(x) = \text{lim. } q. d x^2$, $d^3 f(x) = \text{lim. } r. d x^3$ ... (§. 142.). Nun sind aber lim. p, lim q, lim. r .... die Werthe von p, q, r, ... für $\Delta x = o$ (§. 113.), welche mit p', q', r'.... bezeichnet wurden (§. 148.);

$$\text{daher ist } p' = \frac{d f(x)}{d x}, \; q' = \frac{d^2 f(x)}{d x^2}, \; r' = \frac{d^3 f(x)}{d x^3} \ldots,$$

und mithin

$$f(x+u) = f(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{d f(x)}{d x} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{d x^2} + \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{d x^3} + \ldots$$

von welcher Reihe sich leicht beweisen läßt, daß ihr n^{tes} Glied $= \frac{u^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} \cdot \frac{d^{n-1} f(x)}{d x^{n-1}}$ sey.

Dieser Satz: $f(x+u) = f(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{d f(x)}{d x} + \ldots$,

welcher den veränderten Werth einer Function einer veränderlichen Größe vermittelst der Differentialen der Function finden lehrt, heißt von seinem Erfinder der Taylor'sche Lehrsatz.

§. 150.

Nach diesem Satze ist die Veränderung der Function, wenn x um u zunimmt,

$$f(x+u) - f(x) = \frac{u}{1} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\,f(x)}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\,f(x)}{dx^3} + \ldots$$

Diese ist $= \frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx}$ beynahe, wenn u sehr klein ist; weil die Glieder $\frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\,f(x)}{dx^2}$, $\frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\,f(x)}{dx^3}$..., (in welchen $\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3\,f(x)}{dx^3}$... nur Functionen von x, nicht aber von u oder dx sind) in Hinsicht auf $\frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx}$ desto mehr abnehmen, je kleiner u ist.

Setzt man, da dx willkürlich ist, $dx = u$, so erhält man:

$f(x+dx) - f(x) = df(x)$ beynahe; also ist das Differentiale einer Function ein Näherungswerth für die Veränderung derselben, wenn die als Differentiale angenommene Veränderung der veränderlichen Größe sehr klein ist.

§. 151.

Bey der Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes müssen die Differentialen $d^2 f(x)$, $d^3 f(x)$... nach §. 143. bestimmt werden; weil bey der Ableitung dieses Satzes vorausgesetzt wurde, daß die Veränderungen $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$... durch gleiche Veränderungen von x entstehen.

So ist für $f(x) = b^x$, $df(x) =$

$b^x\,dx\,[(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots]$ (§. 136.) $= \frac{b^x\,dx}{M}$ (§. 137.),

mithin $d^2 f(x) = \frac{b^x\, dx^2}{M^2}$, $d^3 f(x) = \frac{b^x\, dx^3}{M^3}$, $d^4 f(x) = \frac{b^x\, dx^4}{M^4}$ ....; also wird $f(x+u) =$

$$b^{x+u} = b^x + \frac{u\, b^x}{1.M} + \frac{u^2 b^x}{1.2\,M^2} + \frac{u^3 b^x}{1.2.3\,M^3} + \frac{u^4 b^x}{1.2.3.4M^4} + \ldots$$

und daraus folgt

$$b^u = 1 + \frac{u}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{u}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{u}{M}\right)^4 + \ldots$$

V. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Berechnung der Logarithmen.

§. 152.

Man nehme an, in §. 138. bezeichne y eine beständige Zahl a, so ist $dy = o$ (§. 128.), mithin $d.a^v = \frac{a^v \log a.dv}{M}$.

Nach §. 136. ist aber auch $d.a^v = a^v\, dv[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots]$; also erhält man $\log. a = M[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots]$ für jede positive Zahl a. Setzt man zur Abkürzung $a - 1 = u$, so wird

$$\log.(1+u) = M(u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \ldots \mp \tfrac{1}{n}u^n \mp \ldots),$$

wobey $M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots}$ für die Grundzahl b ist (§. 137.).

§. 153.

Setzt man $\frac{z}{x}$ für u, so ist $1 + u = \frac{x+z}{x}$ und log. $(1+u)$ $=$ log. $(x+z)$ — log. x; daher ist log. $(x+z) =$ log. x $+ M$ $[\frac{z}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}\right)^3 - \ldots]$.

Diese Formel für log. $(x+z)$ erhält man auch vermittelst des Taylor'schen Lehrsatzes (§. 149.), wenn man $f(x) =$ log. x setzt, und z statt u schreibt.

§. 154.

Bezeichnet b die Grundzahl eines Logarithmen-Systemes, so ist b^u die Zahl, wozu in diesem Systeme u als Logarithmus gehört; die Reihe $1 + \frac{u}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{u}{M}\right)^3 + \ldots$ (§. 151.) drückt also die Zahl durch ihren zugehörigen Logarithmus aus, so wie die Formel $M\,(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \ldots)$ (§. 152.) den Logarithmus durch den Theil u der zugehörigen Zahl $1 + u$ ausgedrückt angibt.

§. 155.

Durch die Gleichung $M = 1 : [(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots]$ (§. 137.) wird angegeben, wie die Größe M durch die Grundzahl bestimmt wird; und wenn man in (§. 151.), $u = 1$ setzt, so erhält man $b = 1 + \frac{1}{M} + \frac{1}{1.2M^2} + \frac{1}{1.2.3M^3} + \ldots$, welche Reihe also ausdrückt, wie die Grundzahl b durch die Zahl M bestimmt wird.

Man kann mithin immer für einen beliebig angenommenen Werth der Grundzahl den zugehörigen Werth von M, und umgekehrt, angeben.

§. 156.

Logarithmen, deren Grundzahl dadurch bestimmt wird, daß man $M = 1$ setzt, heißen natürliche oder hyperbolische,

wird aber die Grundzahl durch einen von Eins unterschiedenen Werth von M bestimmt, so nennt man die Logarithmen künstliche. Die natürlichen Logarithmen werden in der Folge zur Unterscheidung durch ein bloßes L, die künstlichen aber durch log. bezeichnet.

Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, welche man mit e zu bezeichnen pflegt, ist also

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ (§. 155.)}$$

$$= 2{,}7182818284590\ldots$$

Man findet diesen Werth, wenn man die Glieder der Reihe in Decimal-Brüche verwandelt, und dieselben addirt. Um den Werth eines Gliedes als Decimal-Bruch zu erhalten, darf man nur den Decimal-Bruch, welchen das vorhergehende Glied gibt, durch den Factor des Nenners, welcher im Nenner des vorhergehenden Gliedes nicht vorkömmt, dividiren; denn

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} : n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}.$$

Auch ist $d\,L\,x = \frac{dx}{x}$ (§. 137.).

§. 157.

Der Erklärung §. 156. zu Folge ist

$$L(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \ldots \text{ (§. 152.).}$$

Diese Reihe dient aber nur zur Berechnung der natürlichen Logarithmen solcher Zahlen, welche wenig von der Zahl Eins unterschieden sind; denn wenn $u > 1$ ist, so werden die folgenden Glieder der Reihe größer als die vorhergehenden; mithin erhält man in diesem Falle, da man niemals die Summe aller Glieder nehmen kann, durch die Summe einer beliebigen Anzahl Glieder wegen Weglassung der folgenden keinen Näherungswerth für den Logarithmus.

§. 158.

Gibt man der Größe u einen negativen Werth, so erhält man

$L(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 - \ldots$, wobey aber u nur ein ächter Bruch seyn kann, damit $1-u$ noch positiv bleibe, weil negative Zahlen keine Logarithmen haben.

Es ist daher für $u < 1$,

$$L(1+u) - L(1-u) = 2u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{7}u^7 + \ldots, \text{ oder}$$

$$L\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + \right).$$

Setzt man den ächten Bruch $u = \frac{1}{p}$, so kann p jede Zahl bezeichnen, welche > 1 ist, und es wird dadurch $\frac{1+u}{1-u} =$

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right) : \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{p+1}{p-1}; \text{ also}$$

$$L\left(\frac{p+1}{p-1}\right) = L(p+1) - L(p-1) = 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \ldots\right).$$

Durch diese Reihe erhält man, wenn $p = 3$ ist,

$$L\left(\frac{3+1}{3-1}\right) = L2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

$$= 0{,}693147180559\ldots,$$

welche Zahl am leichtesten gefunden wird, wenn man zuerst die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^5} \ldots$ in Decimal-Brüche verwandelt, (wobey, um den folgenden zu erhalten, nur der vorhergehende durch 3^2 oder 9 dividirt werden darf), und dann jeden davon durch den Exponenten der zugehörigen Potenz der Zahl 3 dividirt.

§. 159.

Man setze $\frac{1+u}{1-u} = \frac{q^2}{q^2-1}$, so wird $u = \frac{1}{2q^2-1}$, wo also q jede ganze Zahl seyn kann, folglich (§. 158.)

$$L\left(\frac{q^2}{q^2-1}\right) = Lq^2 - L(q^2-1) = 2\left[\frac{1}{(2q^2-1)} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \ldots\right];$$

daraus ist

$$Lq^2 = L(q^2-1) + 2\left[\frac{1}{(2q^2-1)} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \ldots\right], \text{ oder}$$

$$2\,Lq = L[(q+1)(q-1)] + 2\left[\frac{1}{(2q^2-1)} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \ldots\right];$$

mithin

$$Lq = \frac{L(q+1)+L(q-1)}{2} + \frac{1}{(2q^2-1)} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \frac{1}{7(2q^2-1)} + \ldots$$

§. 160.

Obwohl in der zuletzt gefundenen Formel, $L(q+1)$ bekannt seyn muß, wenn man dadurch Lq berechnen will, so können doch vermittelst derselben, nachdem $L\,2$ bereits bekannt ist (§. 158.), die natürlichen Logarithmen aller Primzahlen der Ordnung nach berechnet, und mithin die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen gefunden werden, weil man die Logarithmen der zusammen gesetzten Zahlen durch die bloße Addition der Logarithmen derjenigen Primzahlen, welche die Factoren der zusammen gesetzten sind, finden kann.

Es ist nämlich jede Primzahl q, die Zahl 2 ausgenommen, eine ungerade Zahl, also $q+1$ eine gerade, folglich $\frac{1}{2}(q+1)$ eine ganze Zahl und $< q$; daher ist $L(q+1) = L\,2 + L\,\frac{1}{2}(q+1)$ bekannt.

Es ist also

$$L\,3 = \frac{L\,4 + L\,2}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{3\,.\,17^3} + \frac{1}{5\,.\,17^5} + \ldots;$$ aber

$L\,4 = L\,2 + L\,2 = 2\,L\,2 = 1{,}386294361119\,8\ldots$,

folglich $L\,3 = 1{,}0986122886681\ldots$

und dann $L\,6 = L\,2 + L\,3 = 1{,}791759469228\,0\ldots$

Ferner ist

$$L\,5 = \frac{L\,6 + L\,4}{2} + \frac{1}{49} + \frac{1}{3\,.\,49^3} + \frac{1}{5\,.\,49^5} + \ldots$$

$= 1{,}6094379124341\ldots$

Aus $L\,2$ und $L\,5$ folgt nun

$L\,10 = 2{,}3025850929940\ldots$

§. 161.

Aus den natürlichen Logarithmen lassen sich die Logarithmen eines jeden andern Systemes leicht ableiten; denn nach §. 152. ist für jeden Werth von M,

$\log.(1+u) = M(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \ldots)$; aber

$u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \ldots = L(1+u)$ (§. 157.); also

$\log.(1+u) = M\,L(1+u)$.

Man findet daher den zu einer gegebenen Grundzahl b gehörigen Logarithmus einer jeden Zahl durch die Multiplication des natürlichen Logarithmus dieser Zahl mit $M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1^2) + \ldots}$.

Deßhalb heißt M der Model derjenigen Logarithmen, deren Grundzahl die den Werth von M bestimmende Zahl b ist.

Setzt man in §. 157., $1+u = b$, so erhält man $L\,b = (b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots$; also ist $M = \frac{1}{L\,b}$; mithin findet man den Model eines durch die Grundzahl gegebenen Systemes, wenn man Eins durch den natürlichen Logarithmus der Grundzahl dividirt.

Bekanntlich heißen jene Logarithmen, deren Grundzahl = 10 ist, gemeine oder briggische; also ist der Model der gemeinen Logarithmen $= \frac{1}{L\,10} =$

$1 : 2{,}302585\ldots = 0{,}434294481903 2\ldots$

§. 162.

$$\text{Aus } b^u = 1 + \frac{u}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{u}{M}\right)^3 + \ldots$$

(§. 151.) wird, wenn man $\frac{1}{L\,b}$ für M, und folglich $u\,L\,b$ für $\frac{u}{M}$ setzt,

$$b^u = 1 + u\,L\,b + \frac{u^2}{1.2}(L\,b)^2 + \frac{u^3}{1.2.3}(L\,b)^3 + \ldots$$

§. 163.

Die logarithmischen Tafeln enthalten gewöhnlich bloß die gemeinen Logarithmen mit sieben Decimal-Stellen. Sollte nun der natürliche Logarithmus einer Zahl verlangt werden, so wird dieser aus dem gemeinen Logarithmus der Zahl gefunden, wenn man den letztern mit $L\,10 = 2{,}302585092\ldots$ multiplicirt; denn aus $\log.\ vulg.\ p = \frac{1}{L\,10}\ Lp$ (§. 161.) ist $Lp = \log.\ vulg.\ p \times L\,10$.

Bezeichnet man die Kennziffer des gemeinen Logarithmus der Zahl p mit c, und die Decimal-Ziffern oder Mantissen der Ordnung nach mit m', m'', m'''....., so ist $\log.\ vulg.\ p = c + \frac{m^{I}}{10} + \frac{m^{II}}{100} + \frac{m^{III}}{1000} + \ldots$; also

$$L\,p = \log.\ vulg.\ p \times L\,10 = c\,L\,10 + \frac{m^{I}L10}{10} + \frac{m^{II}L10}{100} + \frac{m^{III}L10}{1000} + \frac{m^{IV}L10}{10000} + \ldots$$

Da c, m^{I}, m^{II}, m^{III} ... keine andern Werthe haben können, als 0, 1, 2, 3 ... 9, so kann die Verwandlung der gemeinen Logarithmen in natürliche sehr leicht durch Hülfe einer Tabelle, welche die Vielfachen von L 10 vom Einfachen bis zum Neunfachen, wie die folgende, enthält, bewerkstelliget werden.

1	2,30258509
2	4,60517019
3	6,90775528
4	9,21034037
5	11,51292546
6	13,81551056
7	16,11809565
8	18,42068074
9	20,72326584

Man nehme nämlich dasjenige Vielfache von L 10 aus der Tabelle, welches die Kennziffer angibt, schreibe darunter das der ersten Mantisse zugehörige, unter dieses dasjenige, wel-

ches die zweyte Mantisse erfordert, u. s. w., aber so, daß das Komma immer um eine Stelle weiter zur Rechten zu stehen kömmt. Man addire alle diese Vielfachen, betrachte nur das am weitesten zur Linken stehende Komma als gültig, und behalte von der Summe nur 7 Decimal-Stellen, von welchen man die letzte, größerer Genauigkeit halber um Eins vermehren muß, wenn die weggelassene 8te Decimalstelle > 4 ist.

Diejenigen Ziffern der Vielfachen von L 10, welche keinen Einfluß auf die Bestimmung der 7 ersten Decimal-Ziffern des natürlichen Logarithmus haben, können sogleich weggelassen werden.

Beyspiel I.

L 235, 733 anzugeben. —

Aus den Tabellen ist log. vulg. 235, 733 = 2,3724204; man erhält also nach der vorstehenden Tabelle:

2,	4,605170 19
3	6,9077553
7	16,118096
2	4,60517
4	9,2103
2	4,605
0	0,00
4	9,2

L 235,733 = 5,4626999

Beyspiel II.

L 2 aus log. vulg. 2 = 0,30103 00 zu finden.

0,	0,00000000
3	6,9077553
0	0,000000
1	2,30259
0	0,0000
3	6,908

L 2 = 0,6931472

Beyspiel III.

L 0,04780947 zu finden. —

Die Tafeln geben log. vulg. 0,04780947 = 0,6795139 — 2 ; also ist

0,	0,00000000
6	13,8155106
7	16,118096
9	20,723327
5	11,5129
1	2,303
3	6,91
9	20,7
	1,56463859
— 2	—4,60517019
L 0,04780947 =	— 3,0405316

Die 7te Decimal-Ziffer des natürlichen Logarithmus, welchen man aus dem gemeinen durch die angegebene Verwandlung erhält, ist deßhalb nicht immer bis auf eine Einheit genau, weil das Product der 8ten Mantisse m^{VIII} des gemeinen Logarithmus, (welche in den Tafeln nicht mehr vorkömmt, und deren Werth $= \frac{m^{VIII}}{10^8}$ ist,) mit 2,302 . . . noch $\frac{1}{10^7}$ betragen kann.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Functionen.

§. 164.

Wenn man annimmt, daß in einer Function einer veränderlichen Größe die letztere beständig zunehme, so ist damit nicht

immer eine ununterbrochene Zunahme der Function verbunden, sondern es kann auch während dessen die Function stetig abnehmen, wie z. B. der Bruch $\frac{a}{x}$, wenn x wächst; oder es kann die Function mit der veränderlichen Größe bis zu einem gewissen Werthe der letztern zunehmen, und dann wieder abnehmen, während die veränderliche Größe zuzunehmen fortfährt, wie z. B. im Kreise die Sehne eines Bogens mit demselben zunimmt, bis der Bogen der halben Kreislinie gleich wird, dann aber wieder abnimmt, wenn der Bogen noch größer wird; oder es kann auch die Function während der Zunahme der veränderlichen Größe anfangs abnehmen, und dann mit derselben zugleich wachsen, wenn sie bey ihrer Zunahme einen gewissen Werth erreicht hat, wie z. B. der Werth des Ausdruckes $\frac{1+4x^3}{x}$, wenn man der Größe x anfangs einen sehr kleinen positiven Werth beylegt, abnimmt, sobald x wächst, und dann mit x zugleich zunimmt, wenn $x > \frac{1}{2}$ ist.

§. 165.

Wenn bey stetiger Zunahme der veränderlichen Größe die Werthe der Function anfangs zunehmen, und dann abnehmen, so heißt jener Werth der Function, mit welchem sie zuzunehmen aufhören, ein Größtes oder ein Maximum; nimmt aber die Function anfangs ab, und dann mit der veränderlichen Größe zugleich zu, so heißt ihr Werth, womit die Abnahme vollendet ist, ein Kleinstes oder ein Minimum.

Der Werth einer Function, welcher größer ist, als diejenigen Werthe derselben, welche durch die zunächst größern und kleinern Werthe der veränderlichen Größe bestimmt werden, ist also ein größter Werth derselben; und derjenige Werth, welcher kleiner ist, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Werthe, ist ein kleinster Werth.

§. 166.

Da unter dem Größten und Kleinsten nicht der absolut größte und kleinste Werth einer Function verstanden wird, so

kann eine Function mehrere größte und kleinste Werthe haben; dann muß es aber zwischen zwey größten immer einen kleinsten, und zwischen zwey kleinsten Werthen immer einen größten geben.

Die größten und kleinsten Werthe einer Function heißen gemeinschaftlich die äußersten Werthe der Function.

§. 167.

Weil $f(x+u)=f(x)+\frac{u}{1}\cdot\frac{df(x)}{dx}+\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\ldots$ der Werth einer Function beym Werthe $x+u$ der veränderlichen Größe ist (§. 149.), so erhält durch den Werth $x-u$ der letztern, die Function den Werth: $f(x-u)=f(x)-\frac{u}{1}\cdot\frac{df(x)}{dx}+\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\ldots$; es bezeichnen also $f(x-u)$, $f(x)$, $f(x+u)$ die Werthe der Function, welche der Ordnung nach mit den zunehmenden Werthen $x-u$, x, $x+u$ der veränderlichen Größe zusammen gehören.

Da $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}\ldots$ Functionen von x seyn können, so erhalten für diesen Fall diese Größen durch verschiedene Werthe, welche man für x annimmt, ebenfalls verschiedene Werthe.

§. 168.

Man nehme an, x habe einen solchen Werth, daß dadurch $f(x)$ und $\frac{df(x)}{dx}$ positiv werden, und lasse u bey unverändertem x abnehmen, so muß man dadurch zu einem Werthe von u gelangen, für welchen

$\frac{u}{1}\cdot\frac{df(x)}{dx}>\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\ldots$ und

$\frac{u}{1}\cdot\frac{df(x)}{dx}>\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\ldots$ wird und auch bleibt, wenn man u noch kleiner nimmt (§. 97.); mithin wird

$\frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots$ positiv und

$-\frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \ldots$ negativ, die Größen $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ ... mögen positiv oder negativ seyn.

Daraus folgt $f(x+u) > f(x)$ und $f(x-u) < f(x)$, d. h. die Werthe $f(x-u)$, $f(x)$, $f(x+u)$ der Function nehmen mit den Werthen $x-u$, x, $x+u$ der veränderlichen Größe beständig zu; also ist der Werth $f(x)$ der Function kein Größtes und kein Kleinstes, wenn derselbe durch einen solchen Werth von x bestimmt wird, daß durch den letztern, $f(x)$ und $\frac{df(x)}{dx}$ positiv werden.

Eben so findet man, daß für Werthe von x, wodurch $f(x)$ positiv, $\frac{df(x)}{dx}$ aber negativ wird, die Werthe $f(x-u)$, $f(x)$, $f(x+u)$, der Ordnung nach abnehmen, und daß daher solchen Werthen von x ebenfalls keine größten oder kleinsten Werthe der Function zugehören.

§. 169.

Gibt es einen Werth von x, durch welchen $\frac{df(x)}{dx} = 0$ wird, so ist für diesen Werth von x,

$$f(x+u) = f(x) + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \ldots \text{ und}$$

$$f(x-u) = f(x) + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \ldots$$

Wird für diesen Werth von x auch $f(x)$ und $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ positiv, und nimmt man wieder u so klein, daß dadurch $\frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ größer als die Summe aller folgenden Glieder sowohl in der einen als in der andern Reihe wird (§. 97.), so wird $f(x+u)$

$> f(x)$, und $f(x-u) > f(x)$; folglich ist $f(x)$ ein Kleinstes, weil die unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Werthe der Function größer als $f(x)$ sind.

Wird aber $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ negativ, so ist $f(x+u) < f(x)$ und $f(x-u) < f(x)$; mithin $f(x)$ ein Größtes.

§. 170.

Wenn bey demjenigen Werthe von x, bey welchem $f(x)$ positiv und $\frac{df(x)}{dx} = 0$ wird, auch $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$ ist, so ist

$$f(x+u) = f(x) + \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \ldots \text{ und}$$

$$f(x-u) = f(x) - \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \ldots;$$

folglich für Werthe von u, welche in beyden Reihen das Glied $\frac{u^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ größer als die Summe aller folgenden Glieder machen, $f(x+u) > f(x)$, und $f(x-u) < f(x)$, wenn $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ positiv ist; aber $f(x+u) < f(x)$ und $f(x-u) > f(x)$, wenn $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ negativ ist; mithin ist $f(x)$ in keinem Falle ein äußerster Werth der Function.

§. 171.

Durch Fortsetzung der bisherigen Art zu schließen findet man, daß bey einem Werthe von x, wodurch $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ und $\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 0$, aber $f(x)$ und $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ positiv werden, die Function ein Kleinstes sey, ein Größtes hingegen, wenn $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ negativ wird; und überhaupt, daß jenen Werthen der veränderlichen Größe, wodurch alle Differential-

Coefficienten bis auf einen von gerader Ordnung Null werden, immer ein äußerster Werth der Function zugehöre, und zwar ein kleinster oder größter, jenachdem dieser Differential-Coefficient von gerader Ordnung positiv oder negativ wird; daß aber die Werthe der Function keine äußersten seyen, wenn sie mit solchen Werthen der veränderlichen Größe zusammen gehören, wodurch alle Differential-Coefficienten der Ordnung nach bis auf einen von ungerader Ordnung Null werden.

§. 172.

Bisher wurde immer vorausgesetzt, daß die veränderliche Größe die Werthe der Function positiv mache. Allein das Angeführte gilt durchgehends bey allen Werthen der Function, wenn man dem allgemein eingeführten Sprachgebrauche zu Folge bey der Vergleichung negativer Größen unter sich und mit positiven, diejenigen negativen Größen kleiner heißt, welche durch größere Zahlen ausgedrückt werden, und die negativen Größen überhaupt kleiner nennt als die positiven.

Wenn man daher findet, daß ein negativer Werth einer Function ein Größtes sey, so zeigt dieses an, daß ihre unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werthe durch größere negative Zahlen ausgedrückt werden. Wenn sich Null als ein Kleinstes oder Größtes findet, so wird dadurch angegeben, daß die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Werthe der Function im ersten Falle positiv und im zweyten Falle negativ seyen.

§. 173.

Weil die äußersten Werthe von $f(x)$ nur solchen Werthen von x zugehören können, bey welchen $\frac{df(x)}{dx} = o$ wird (§. 168. u. 169.), so sind diese Werthe von x die Wurzeln der Gleichung

$\frac{df(x)}{dx} = o$. Ob aber die mit diesen Wurzeln zusammen gehörigen Werthe von $f(x)$ wirklich äußerste Werthe seyen, entscheidet sich erst durch die Werthe, welche $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ ... durch diese Wurzeln erhalten.

§. 174.

In einer Function mehrerer von einander unabhängiger veränderlichen Größen x, y, z, ... kann sich eine einzelne aus ihnen, z. B. x verändern, während alle übrigen ihre Werthe behalten.

Man kann also die letztern als unveränderlich betrachten, und diejenigen Werthe von x suchen, welchen äußerste Werthe der Function zukommen können.

Eben so kann man hinsichtlich jeder von den übrigen veränderlichen Größen verfahren.

Diese Werthe geben so viele Gleichungen als veränderliche Größen, in welchen jede von den letztern durch die übrigen ausgedrückt ist; man kann also jede veränderliche Größe durch beständige ausdrücken (§. 80.).

Hierauf kann untersucht werden, ob die Function in Hinsicht auf jede einzelne veränderliche Größe ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Findet man, daß der erste Fall Statt habe, so erhält die Function ebenfalls einen größten Werth; einen kleinsten hingegen, wenn der zweyte Fall eintrifft.

Bringt aber nicht jeder von diesen Werthen der veränderlichen Größen, einzeln einen äußersten Werth der Function von einerley Art rücksichtlich der zugehörigen veränderlichen Größe hervor, so erhält auch die Function durch alle diese Werthe keinen äußersten.

§. 175.

Bey hieher gehörigen Aufgaben, welche unbestimmte seyn müssen, suche man zwischen den unbestimmten, also veränderlichen

Grösßen diejenigen Gleichungen, welche aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitet werden können.

Dann drücke man diejenige veränderliche Größe, von welcher äußerste Werthe gesucht werden, als entwickelte Function der übrigen aus, und schaffe von den letztern so viele weg, als vermittelst der gefundenen Gleichungen geschehen kann.

Wenn nur noch Eine veränderliche Größe bleibt, so dividire man das Differentiale der Function durch das Differentiale der veränderlichen Größe, und setze den Quotienten $= 0$; so hat man eine Gleichung, welche alle Werthe der veränderlichen Größe enthält, bey welchen äußerste Werthe der Function möglich sind (§. 173.).

Ob jeder von diesen Werthen wirklich einen äußersten Werth der Function gebe, wird nach §. 171. durch die Coefficienten der höhern Differentialen bestimmt.

Enthält aber der Ausdruck der Function noch mehrere veränderliche Grösßen, so sind die letztern von einander unabhängig, daher kann man nach §. 174. verfahren.

§. 176.

Weil ein Product aus einem beständigen nnd einem veränderlichen Factor mit dem letztern zugleich zu- und abnimmt, so darf man nur die Bedingungen suchen, unter welchen der veränderliche Factor einen äußersten Werth erhält, um zu erfahren, wann dem Producte selbst ein solcher Werth zukomme.

Eben dasselbe hat bey Potenzen veränderlicher Grösßen Statt, deren Exponenten positive beständige Zahlen sind, diese mögen übrigens ganz oder gebrochen seyn.

§. 177.

Beyspiel I.

Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels sey ein Punct gegeben, und durch denselben eine gerade Linie gezogen, welche

die beyden Schenkel schneidet; es soll die Lage dieser Linie gefunden werden, in welcher dieselbe ein Kleinstes wird. —

Durch die Lage des Punctes sind auch seine Abstände a und b von den Schenkeln gegeben, und wenn x den Abstand des Durchschnittspunctes der geraden Linie mit einem Schenkel, z. B. mit demjenigen, von welchem der Punct die Entfernung b hat, von dem Scheitel des rechten Winkels bezeichnet, so ist durch x auch die Lage der geraden Linie bestimmt.

Durch a, b und x ausgedrückt findet man nun die Größe der geraden Linie, $y = \frac{x\sqrt{b^2+(x-a)^2}}{x-a}$; mithin wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)^3 - ab^2}{(x-a)^2\sqrt{b^2+(x-a)^2}},$$

Für die äußersten Werthe von y muß $\frac{dy}{dx} = o$, mithin

$(x-a)^3 - ab^2 = o$, also $x = a + \sqrt[3]{ab^2}$ seyn.

Weil nun überhaupt

$$d^2y = -2(x-a)^{-3}dx^2[(x-a)^3-ab^2][b^2+(x-a)^2]^{-\frac{1}{2}}$$
$$+3dx^2[b^2+(x-a)^2]^{-\frac{1}{2}}$$
$$-(x-a)^{-1}dx^2[(x-a)^3-ab^2][b^2+(x-a)^2]^{-\frac{3}{2}}$$

gefunden wird, so wird für $x = a + \sqrt[3]{ab^2}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = +3 : \sqrt{(b^2+b\sqrt[3]{a^2b})}$; also gehört zu $x = a + \sqrt[3]{ab^2}$ ein kleinster Werth von y, und dieser ist $= \left(a+\sqrt[3]{ab^2}\right)\sqrt{[b^2 + b\sqrt[3]{a^2b}]} : \sqrt[3]{ab^2}$.

Beyspiel II.

Es sollen die Werthe von x angegeben werden, für welche die Function: $y = 12x^7 + 14x^6 - 84x^5 - 21x^4 + 224x^3 - 168x^2 + 5$, äußerste Werthe erhält. —

Es ist $dy = (7.12x^6 + 6.14x^5 - 5.84x^4 - 4.21x^3 + 3.224x^2 - 2.168x)dx = 84\,dx(x^6 + x^5 - 5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x)$; also sind die verlangten Werthe von x unter den Wurzeln der Gleichung: $x^6 + x^5 - 5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x = 0$ enthalten, und man findet (§. 65.), daß 0, + 1, + 1, + 1, — 2, und — 2 diese Wurzeln seyen.

Dann ist $d^2y = 84\,dx^2(6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 3x^2 + 16x - 4)$; also erhält $\frac{d^2y}{dx^2}$, wenn man $x = 0$, $x = +1$ und $x = -2$ setzt, der Ordnung nach die Werthe: $-84 . 4$; 0; 0; daher gibt $x = 0$ einen größten Werth von y.

Ferner ist $d^3y = 84\,dx^3(30x^4 + 20x^3 - 60x^2 - 6x + 16)$, und daraus für $x = +1$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, für $x = -2$ aber $\frac{d^3y}{dx^3} = 84 . 108$; also gehört zu $x = -2$ weder ein größter noch ein kleinster Werth von y.

Endlich ist $d^4y = 84\,dx^4(120x^3 + 60x^2 - 120x - 6)$; mithin wird für $x = +1$, $\frac{d^4y}{dx^4} = 84 . 54$, welches einen kleinsten Werth von y anzeigt.

Die gegebene Function hat also nur einen größten Werth + 5 für $x = 0$, und einen kleinsten — 18 für $x = +1$.

Beyspiel III.

Es sollen die Seiten des rechtwinkligen Parallelepipedums gefunden werden, dessen Inhalt bey gegebener Oberfläche ein Größtes ist. —

Es seyen x, y und z die Seiten, so ist der Inhalt $= xyz$, und die Oberfläche $= 2(xy + xz + yz)$.

Bezeichnet man den erstern mit u, und die letztere mit 2a, so hat man also die beyden Gleichungen: $u = xyz$ und $a = xy + xz + yz$.

Aus der zweyten ist $z = \frac{a - xy}{x + y}$; daher ist auch $u = (axy - x^2y^2)(x + y)^{-1}$.

Differentiirt man diesen Werth von u nach x (nämlich so, daß man x allein als veränderlich, mithin y als beständig betrachtet), so wird $\frac{du}{dx} = y^2 (a - x^2 - 2xy) (x+y)^{-2}$, und wenn man nach y differentiirt, $\frac{du}{dy} = x^2 (a - y^2 - 2xy)(x+y)^{-2}$.

Für die äußersten Werthe von u muß also $\frac{y^2 (a - x^2 - 2xy)}{(x+y)^2}$ $= 0$ und $\frac{x^2 (a - y^2 - 2xy)}{(x+y)^2} = 0$ seyn, woraus, weil x und y nicht negativ und nicht Null seyn können, $x = y = \sqrt{\frac{1}{3}a}$ folgt. Ferner findet man $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2y^2(a+y^2)}{(x+y)^3}$ und $\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{2x^2(a+x^2)}{(x+y)^3}$, also wird für $x = y = \sqrt{\frac{1}{3}a}$, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Da mithin u sowohl in Hinsicht auf x, als auch in Hinsicht auf y ein Größtes wird, so hat man also einen größten Werth von u, wenn man $x = y = \sqrt{\frac{1}{3}a}$ annimmt, und dieser größte Werth von u ist $= \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

Die angeführten Werthe von x und y geben auch $z = \sqrt{\frac{1}{3}a}$; daher hat unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche, der Würfel den größten Inhalt.

Beyspiel IV.

Die Werthe von x und y zu finden, für welche $u = x^3 + 26x^2 + 18xy - y^3$ äußerste Werthe erhält. —

Man erhält $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 52x + 18y$ und $\frac{du}{dy} = 18x - 3y^2$, mithin die Gleichungen: $3x^2 + 52x + 18y = 0$ und $6x - y^2 = 0$.

Aus diesen Gleichungen findet man für x und y die zusammen gehörigen möglichen Werthe: $x = 0$, $y = 0$ und $x = \frac{2}{3}$, $y = -2$.

Ferner ist $\frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 52$ und $\frac{d^2u}{dy^2} = -6y$; also, wenn man $x = o$ und $y = o$ setzt, $\frac{d^2u}{dx^2} = +52$ und $\frac{d^2u}{dy^2} = o$; da aber $\frac{d^3u}{dy^3} = -6$ ist, so gehört bloß zu $x = o$ ein äußerster und zwar ein kleinster Werth von u, zu $y = o$ aber keiner; daher geben $x = o$ und $y = o$ keinen äußersten Werth dieser Function.

Durch die beyden andern Werthe: $x = \frac{2}{3}$ und $y = -2$ wird $\frac{d^2u}{dx^2} = +56$ und $\frac{d^2u}{dy^2} = +12$; folglich geben diese Werthe von x und y einen kleinsten Werth von u, welcher $= -\frac{112}{27}$ ist, d. h. der Werth $-\frac{112}{27}$ von u wird durch eine größere negative Zahl angegeben, als die Werthe von u, welche den unmittelbar vorhergehenden und folgenden Werthen von x und y zugehören (§. 172.).

VII. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der Werthe gebrochener Functionen, wenn diese die Form $\frac{o}{o}$ erhalten.

---

*§. 178.

Es trifft sich zuweilen, daß bey einem Bruche $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dessen Zähler und Nenner Functionen einer veränderlichen Größe x sind, für einen bestimmten Werth a von x sowohl $f(x)$ als $\varphi(x)$

Null werden, daß also der Bruch bey diesem Werthe von x die Form $\frac{0}{0}$ erhält, unter welcher sich kein bestimmter Werth des Bruches denken läßt.

So wird z. B. für $x = \frac{3}{2}$, $\frac{27 - 8x^3}{6 - 4x} = \frac{0}{0}$. Wodurch diese Form des Bruches im gegebenen Beyspiele hervorgebracht werde, läßt sich auf folgende Art zeigen:

Da $27 - 8x^3$ und $6 - 4x$ bey $x = \frac{3}{2}$ Null werden, so ist $\frac{3}{2}$ eine Wurzel der Gleichung $27 - 8x^3 = 0$, und auch der Gleichung $6 - 4x = 0$; mithin ist $x - \frac{3}{2}$ ein gemeinschaftlicher Factor der Größen $27 - 8x^3$ und $6 - 4x$ (§. 40.). Der Bruch $\frac{27 - 8x^3}{6 - 4x}$ läßt sich also durch die Division des Zählers und Nenners mit $x - \frac{3}{2}$ auf die kleinere Benennung: $\frac{9 + 6x + 4x^2}{2}$ bringen, und hat daher für $x = \frac{3}{2}$ den bestimmten Werth $\frac{27}{2}$.

Der Grund, warum man $\frac{0}{0}$ aus $\frac{27 - 8x^3}{6 - 4x}$ für $x = \frac{3}{2}$ erhält, lag demnach darinn, daß dessen Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor: $x - \frac{3}{2}$ enthielten, welcher für $x = \frac{3}{2}$ selbst Null wird.

* §. 179.

Folgende Untersuchung leitet zu einer allgemeinen Regel, nach welcher die Werthe von Brüchen dieser Art bestimmt werden können.

Nach §. 149. wird allgemein aus $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wenn x um u zunimmt,

$$\frac{f(x+u)}{\varphi(x+u)} = \frac{f(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots}{\varphi(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \ldots};$$

mithin für $x = a$, weil der Voraussetzung gemäß $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ ist,

$$\frac{f(x+u)}{\varphi(x+u)} = \frac{\frac{df(x)}{dx} + \frac{u}{1.2.} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \cdots}{\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{u}{1.2.} \cdot \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \cdots}$$; daraus wird für

$u = o$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{df(x)}{d\varphi(x)}$ beym Werthe a von x.

Werden beym Werthe a von x außer $f(x)$ und $\varphi(x)$ auch $df(x)$ und $d\varphi(x)$ Null, so hat man

$$\frac{f(x+u)}{\varphi(x+u)} = \frac{\frac{u^2}{1.2.} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \cdots}{\frac{u^2}{1.2.} \cdot \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} \cdot \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} + \cdots}$$

$$= \frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{u}{3.} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \cdots}{\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{u}{3.} \cdot \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} + \cdots}$$; daher ist für $u = o$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{d^2 f(x)}{d^2 \varphi(x)}.$$

Man sieht ein, daß überhaupt $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{d^n f(x)}{d^n \varphi(x)}$ seyn müsse, wenn für $x = a$ sowohl $f(x)$, $df(x)$, $d^2 f(x) \ldots d^{n-1} f(x)$, als auch $\varphi(x)$, $d\varphi(x)$, $d^2 \varphi(x) \ldots d^{n-1} \varphi(x)$ Null werden.

Beyspiel I.

Den Werth des Bruches: $y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ für $x = a$ zu finden. —

$$\frac{d\left[x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} + (x-a)^{\frac{1}{2}}\right]}{d.(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} dx (x-a)^{-\frac{1}{2}}}{x\, dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}} + (x-a)^{-\frac{1}{2}}}{2x(x+a)^{-\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}(x+a)^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}};$$

also ist für $x = a$, $y = \frac{a^{\frac{1}{2}}(2a)^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Beyspiel. II.

Den Werth des Bruches: $y = \frac{5 + 6x + x^2}{\sqrt{15 + 3x}}$ anzugeben, wenn $x = -5$ ist. —

$$\frac{d(5 + 6x + x^2)}{d.(15 + 3x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,dx + 2x\,dx}{\frac{3}{2}dx(15+3x)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}(3+x)\sqrt{15 + 3x};$$

daher ist für $x = -5$, $y = -\frac{8}{3}\sqrt{0} = 0$.

Beyspiel III.

Den Werth des Bruches: $y = \frac{10 + 21x + 12x^2 + x^3}{4 + 9x + 6x^2 + x^3}$ für $x = -1$ zu finden. —

Das Differentiale des Zählers durch das des Nenners getheilt, gibt $\frac{7 + 8x + x^2}{3 + 4x + x^2}$, also folgt daraus für $x = -1$,

$$y = \frac{7 - 8 + 1}{3 - 4 + 1} = \frac{0}{0}.$$

Man suche daher das zweyte Differentiale des Zählers sowohl als des Nenners, und dividire jenes durch dieses, so erhält man zum Quotienten: $\frac{4 + x}{2 + x}$, woraus für $x = -1$, $y = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ folgt.

Beyspiel IV.

Den Werth des Bruches: $y = \frac{5 + 2x - 3x^2}{L(4 - \sqrt{7 - 2x})}$ zu finden, wenn $x = -1$ ist. —

$$\frac{d(5 + 2x - 3x^2}{d\,L(4 - \sqrt{7 - 2x})} =$$

$$= \frac{2\,dx - 6x\,dx}{d[4 - (7 - 2x)^{\frac{1}{2}}] : (4 - \sqrt{7 - 2x})} \text{ (§. 156.)}$$

$$= \frac{2\,dx\,(1 - 3x)(4 - \sqrt{7 - 2x})}{-\frac{1}{2}(7 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\,d\,(7 - 2x)}$$

$$= \frac{2\,dx\,(1-3x)\,(4-\sqrt{7-2x})}{dx\,(7-2x)^{-\frac{1}{2}}} = 2\,(1-3x)\,(4-\sqrt{7-2x}).$$

$\sqrt{7-2x}$; daher ist für $x = -1$, $y = 2.4\,(4-\sqrt{9})\,\sqrt{9}$ $= 24$.

* §. 180.

Durch die Anwendung der Differential-Rechnung werden solche Untersuchungen öfters sehr erleichtert, weil dadurch Entwicklungen vermieden werden, welche man sonst vornehmen müßte. Man könnte nämlich nach den im vorhergehenden §. angegebenen Gründen $a + u$ statt x substituiren, die vorkommenden Functionen entwickeln, den Bruch reduciren und dann $u = 0$ setzen.

So müßte im Bruche des vierten Beyspieles $-1 + u$ statt x gesetzt werden, wodurch man $\frac{5+2x-3x^2}{L(4-\sqrt{7-2x})} = \frac{u\,(8-3u)}{L(4-\sqrt{9-2u})}$ erhielte; dann wäre aber erst $L\,(4-\sqrt{9-2u})$ zu entwickeln, welches wieder die Entwicklung von $\sqrt{9-2u}$ erfordert.

V. Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung.

I. Abschnitt.

Von dem Gegenstande und den Grundregeln der Integral-Rechnung.

---

§. 181.

Es seyen $f(x)$ und $\varphi(x)$ Functionen von x, deren Differentialen $df(x)$ und $d\varphi(x)$ einerley Functionen von x, also bey eben demselben beliebigen Werthe von x und dx einander gleich

sind. Da man $d^2 f(x)$ durch Differentiirung von $d f(x)$, und $d^2 \varphi(x)$ durch Differentiirung von $d \varphi(x)$ erhält (§. 143.), so werden $d^2 f(x)$ und $d^2 \varphi(x)$ wieder einerley Functionen von x und d x. Aus dem nämlichen Grunde muß auch $d^3 f(x) = d^3 \varphi(x)$, $d^4 f(x) = d^4 \varphi(x)$, und überhaupt $d^n f(x) = d^n \varphi(x)$ bey einerley Werth von x und von d x seyn.

Man hat nun, wenn x um u zunimmt, $f(x+u) = f(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots$ und

$\varphi(x+u) = \varphi(x) + \frac{u}{1} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} + \ldots$ (§. 149.),

also $f(x+u) - \varphi(x+u) = f(x) - \varphi(x)$, weil wegen $d f(x) = d \varphi(x)$, $d^2 f(x) = d^2 \varphi(x)$ ꝛc. auch

$\frac{u}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{u}{1} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $\frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$

u. s. f. ist.

Der Unterschied zweyer Functionen einer veränderlichen Größe, deren Differentialen einerley Functionen dieser Größe sind, behält also bey jedem Werthe derselben eben denselben Werth; d. h. er ist eine beständige Größe.

§. 182.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt nun, daß Functionen einer veränderlichen Größe, welche auf was immer für eine Art verschieden sind, nicht einerley Differentiale geben können, wenn die Verschiedenheit der Functionen nicht darin besteht, daß der Unterschied derselben eine beständige Größe ist.

§. 183.

Eine Function heißt in Beziehung auf ihr Differentiale das Integrale des Differentiales, und ein gegebenes Differentiale integriren heißt diejenige Function finden, durch deren Differentiirung das gegebene Differentiale erhalten wurde. Die Wissenschaft, gegebene Differentialen zu integriren, heißt Integral-Rechnung.

Das Integrale eines Differentiales bezeichnet man durch Vorsetzung des Buchstabens ($\int$); so bezeichnet z. B. $\int a\,x^2\,dx$ diejenige Function, durch deren Differentiirung $a\,x^2\,dx$ entstand.

§. 184.

Da die beständigen Glieder einer Function im Differentiale derselben nicht mehr vorkommen (§. 130. nro. 1.), so können dieselben bey der Bestimmung des Integrales aus dem Differentiale **allein** nicht angegeben werden; man setzt daher zu dem aus einem Differentiale gefundenen Integrale noch + Const, oder auch nur + C hinzu, wodurch die Summe dieser beständigen Glieder bezeichnet wird.

§. 185.

Bey den Auflösungen der Aufgaben, welche Integrirungen von Differential-Größen erfordern, läßt sich immer Const bestimmen, wenn der Werth des Integrales bey einem bestimmten Werthe a der veränderlichen Größe x bekannt ist.

Man suche nämlich den Werth, welchen das, ohne Rücksicht auf beständige, beym Differentiiren verschwundene Größen, bestimmte Integrale für $x = a$ erhält, und setze denselben mit Const zusammen genommen demjenigen Werthe gleich, welchen die durch das Integriren zu bestimmende Größe für $x = a$ erhalten muß; so erhält man eine Gleichung, wodurch Const vermittelst bekannter Größen bestimmt ist.

Man finde z. B., daß $2\,x\,dx$ das Differentiale einer Größe y sey, und es sey bekannt, daß $y = b$ seyn müsse, wenn $x = a$ ist.

Nun ist $d.x^2 = 2\,x\,dx$ (§. 135.), also $y = \int 2\,x\,dx$ + Const. $= x^2 +$ Const. Die zweyte Bedingung gibt daher $b = a^2 +$ Const, folglich ist in diesem Falle, Const $= b - a^2$, und mithin die gesuchte Größe $y = x^2 + b - a^2$.

Gewöhnlich ist der Werth der veränderlichen Größe bekannt, bey welchem das Integrale $= o$ seyn muß.

§. 186.

Wenn man eine Function f (x) einer veränderlichen Größe x von der Beschaffenheit gefunden hat, daß man durch ihre Differentiirung ein gegebenes Differentiale erhält, und daß f (x) einen gegebenen Werth b erhält, welcher mit einem ebenfalls gegebenen Werthe a von x zusammengehört, so gibt es keine von f (x) verschiedene Function φ (x) von x, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt; denn wäre φ (x) von f (x) so verschieden, daß φ (x) — f (x) veränderlich ist, so wäre es auch d φ (x) vom gegebenen Differentiale (§. 182.), und bestände die Verschiedenheit bloß in einem beständigen Unterschiede zwischen φ (x) und f (x), so könnte für x = a nicht auch φ (x) = b werden.

§. 187.

Es lassen sich demnach die Grundregeln zur Integrirung der Differential-Größen von einer bestimmten Form, aus den Grundregeln der Differential-Rechnung (§. 130. — §. 138.) ableiten, wenn man bey der Bestimmung der Integralen auf diejenigen beständigen Größen, welche beym Differentiiren verschwinden, keine Rücksicht nimmt; wie auch in der Folge geschehen wird, weil die Bestimmung dieser beständigen Größen erst bey der Anwendung der Integral-Rechnung erfordert wird.

§. 188.

Nach §. 130. nro. 5. ist $d(x \pm y) = dx \pm dy$, also $\int (dx \pm dy) = x \pm y = \int dx \pm \int dy$ (§. 183.); d. h. das Integrale der Summe oder Differenz zweyer Differential-Größen ist die Summe oder Differenz ihrer Integralen.

§. 189.

Weil $d.ax = a\,dx$ ist (§. 130. nro. 3.), so ist $\int a\,dx = a\int dx$; also erhält man das Integrale einer

Differential-Größe von der Form eines Productes mit einem beständigen Factor, wenn man den beständigen Factor mit dem Integrale des veränderlichen multiplicirt.

Eben so ist $\int \frac{dx}{a} = \frac{x}{a} = \frac{\int dx}{a}$, weil $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$ ist (§. 132.); d. h. das Integrale einer Differential-Größe von der Form eines Bruches mit beständigem Nenner ist ein Bruch mit eben demselben Nenner, dessen Zähler das Integrale des Zählers der Differential-Größe ist.

§. 190.

Es ist $d.x^m = m\,x^{m-1}\,dx$ (§. 135.), wenn m nicht $= 0$ ist, also $\int m\,x^{m-1}\,dx = x^m$; folglich auch $m\int x^{m-1}\,dx = x^m$, (§. 189.), und daher $\int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m}$, oder $m-1 = n$ gesetzt, $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, wenn n nicht -1 ist.

Wenn also eine Differential-Größe ein Product aus einer Potenz einer veränderlichen Größe mit beständigem Exponenten, der nicht -1 ist, und aus dem Differentiale der veränderlichen Größe ist, so erhält man das Integrale, wenn man $+1$ zum Exponenten addirt, und die auf solche Art veränderte Potenz durch ihren Exponenten dividirt. Z. B. $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$; $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = x^{\frac{5}{3}} : \frac{5}{3} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$; $\int 8\,x^{-5}\,dx = 8\int x^{-5}\,dx$ (§. 189.) $= 8 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -2x^{-4}$; $\int (a\,x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2}x^{-2}\,dx + x\,dx) = \int a\,x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{1}{2}x^{-2}\,dx + \int x\,dx$ (§. 188.) $= a\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2}\int x^{-2}\,dx + \int x\,dx$ (§. 189.) $= a\left(x^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}(x^{-1} : -1) + \frac{x^2}{2} = \frac{2}{3}a\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^2$.

§. 191.

Ein Differentiale von der Form $x^{-r} dx$ kann nach der vorhergehenden Regel deßhalb nicht integrirt werden, weil es keine Potenz von x gibt, deren Differentiale $x^{-1} dx$ ist; allein man weiß aus §. 156., daß $d. Lx = \frac{dx}{x} = x^{-1} dx$ ist; daher ist $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = Lx$; d. h., das Integrale eines Bruches, der das Differentiale des Nenners zum Zähler hat, ist der natürliche Logarithmus des Nenners.

§. 192.

Nach §. 131. ist $d. xy = x dy + y dx$, also $xy = \int (x dy + y dx) = \int x dy + \int y dx$ (§. 188.), und daraus $\int x dy = xy - \int y dx$.

Ferner ist $d. b^x = b^x dx [(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots]$ (§. 136.) $= \frac{1}{M} b^x dx$ (§. 137.) $= b^x dx Lb$ (§. 161.); daher $b^x dx = \frac{d. b^x}{Lb}$, und mithin $\int b^x dx = \frac{b^x}{Lb}$ (§. 189.)

§. 193.

Die ganzen rationalen Differentialen (§. 121.) lassen sich nach §. 190. integriren, wenn man sie zuerst auf die Form $a dx + bx dx + cx^2 dx + \ldots$ bringt, welches immer geschehen kann, wenn man mit den allenfalls vorhandenen zusammen gesetzten Factoren multiplicirt. Z. B. $\int (a-x)(a+2x)^2 dx = \int (a^3 dx + 3a^2 x dx - 4x^3 dx) = a^3 x + \frac{3}{2} a^2 x^2 - x^4$.

Eben so kann man überhaupt alle Differentialen, welche die Gestalt $(ax^m + bx^n + cx^p + \ldots) dx$ haben, oder auf diese Gestalt gebracht werden können, integriren; m, n, p... mögen was immer für beständige Zahlen seyn.

II. Abschnitt.

Von der Integrirung der Differentialen, welche Potenzen mehrtheiliger Größen mit beständigen Exponenten enthalten.

§. 194.

Wenn ein Differentiale eine veränderliche Potenz einer zusammen gesetzten Größe mit beständigem Exponenten m als Factor enthält, und der andere Factor das Differentiale der zusammen gesetzten Größe ist, so läßt sich das Integrale nach §. 190. oder §. 191. finden; denn wenn man die zusammen gesetzte Größe mit X bezeichnet, so ist nach der Voraussetzung das Differentiale $X^m dX$, folglich dessen Integrale $= \frac{X^{m+1}}{m+1}$, wenn m nicht $= -1$ ist, (§. 190.) im letztern Falle aber $= L X$ (§. 191.).

Es sey z. B. $2(a-x)\,dx\,(a^2+2ax-x^2)^{\frac{2}{3}}$ zu integriren, so ist $X = a^2 + 2ax - x^2$, $dX = 2a\,dx - 2x\,dx = 2(a-x)\,dx$; daher $\int 2(a-x)\,dx\,(a^2+2ax-x^2)^{\frac{2}{3}} = \int X^{\frac{2}{3}}\,dX = \frac{3}{5}X^{\frac{5}{3}}$ (§. 190.) $= \frac{3}{5}(a^2+2ax-x^2)^{\frac{5}{3}}$.

Wäre $\frac{(15x^2-b^2)\,dx}{a^3-b^2x+5x^3} = (15x^2-b^2)\,dx\,(a^3-b^2x+5x^3)^{-1}$ zu integriren, so hätte man $X = a^3 - b^2x + 5x^3$, $dX = -b^2\,dx + 15x^2\,dx = (15x^2-b^2)\,dx$; also

$$\int \frac{(15x^2-b^2)\,dx}{a^3-b^2x+5x^3} = \int X^{-1}\,dX = L\,X \text{ (§. 191.)} = L(a^3-b^2x+5x^3).$$

§. 195.

Wenn der mit X^m multiplicirte Factor nicht das Differentiale von X ist, doch aber durch dieses dividirt einen beständigen Quotienten a gibt, so läßt sich das Integrale ebenfalls angeben; denn nach dieser Voraussetzung ist der mit X^m multiplicirte Factor $= a\,dX$, mithin das gegebene Differentiale $= a\,X^m\,dX$, folglich dessen Integrale $= a\int X^m\,dX$ (§. 189.).

Z. B. Aus $\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{a^2-4ax+2x^2}} = (a-x)dx(a^2-4ax+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ folgt $X = a^2-4ax+2x^2$, $dX = -4a\,dx+4x\,dx =$ $= -4(a-x)\,dx$, und es ist $\frac{(a-x)\,dx}{dX} = \frac{(a-x)\,dx}{-4(a-x)\,dx}$ $= -\frac{1}{4}$; also ist $(a-x)\,dx = -\frac{1}{4}\,dX$, folglich

$$\int\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{a^2-4ax+2x^2}} = \int -\tfrac{1}{4}X^{-\frac{1}{2}}\,dX = -\tfrac{1}{4}\int X^{-\frac{1}{2}}\,dX =$$

$-\frac{1}{4}\cdot 2X^{\frac{1}{2}}$ (§. 190.) $= -\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4ax+2x^2}$.

§. 196.

Ueberhaupt läßt sich jedes Differentiale von der Form $x^q\,dx\,(\alpha x^k+\beta x^m+\gamma x^n+..)^p$ integriren, wenn man die zusammen gesetzte Größe $\alpha x^k+\beta x^m+\gamma x^n+...$ zur Potenz des Exponenten p erhebt, jedes Glied dieser Potenz mit $x^q\,dx$ multiplicirt, und dann mit der Integrirung der einzelnen Glieder nach §. 190. oder §. 191. verfährt.

Z. B. $\int x^{-2}\,dx\,(x^{\frac{1}{2}}-5x+2x^{\frac{3}{2}})^2 = \int x^{-2}\,dx\,(x-10x^{\frac{3}{2}}$ $+29x^2-20x^{\frac{5}{2}}+4x^3) = \int(x^{-1}\,dx-10x^{-\frac{1}{2}}\,dx+29\,dx$ $-20x^{\frac{1}{2}}\,dx+4x\,dx) = \int x^{-1}\,dx-10\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+29\int dx$ $-20\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+4\int x\,dx = Lx-20x^{\frac{1}{2}}+29x-\frac{40}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $+2x^2$.

Allein wenn der Exponent p keine ganze positive Zahl ist, kann die Potenz $(\alpha x^k+\beta x^m+\gamma x^n+...)^p$ durch keine bestimmte Zahl von Gliedern ausgedrückt (§. 13 u. 11.) und daher

der Werth des Integrales für bestimmte Werthe der veränderlichen Größe oft nicht einmal näherungsweise angegeben werden.

Man hat daher Methoden erfunden, wodurch man die Integralen solcher Differentialen in einer Form erhält, welche zur Berechnung ihrer Werthe bequemer sind.

Von diesen Methoden sollen nun diejenigen gezeigt werden, welche die Integrirung solcher Differentialen betreffen, bey denen die zusammen gesetzte Größe ein Binomium oder ein Trinomium ist, weil Differentialen von dieser Form am häufigsten vorkommen.

§. 197.

Weil $\alpha x^k + \beta x^m + \gamma x^n + \ldots = x^k \frac{(\alpha x^k + \beta x^m + \gamma x^n + \ldots)}{x^k}$

$= x^k (\alpha + \beta x^{m-k} + \gamma x^{n-k} + \ldots)$ ist, so ist auch $(\alpha x^k + \beta x^m + \gamma x^n + \ldots)^p = x^{kp} (\alpha + \beta x^{m-k} + \gamma x^{n-k} + \ldots)^p$.

Es läßt sich also jede Potenz einer mehrtheiligen Größe von der Form $\alpha x^k + \beta x^m + \gamma x^n + \ldots$ so darstellen, daß ein beliebiges Glied dieser Größe beständig wird, und zwar dadurch, daß man jedes Glied der mehrtheiligen Größe durch die wegzuschaffende Potenz der veränderlichen Größe dividirt, dafür aber die Potenz des Quotienten mit der gleichnamigen Potenz des Divisors multiplicirt.

Wenn die mehrtheilige Größe ein Binomium ist, welches nur Ein veränderliches Glied hat, so kann also die veränderliche Größe aus einem Gliede in das andere geschafft werden.

Beyspiele.

$(2x^2 + 5x^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1} (2 + 5x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

$x^2 (3x^{\frac{1}{2}} + 5)^3 = x^2 . x^{\frac{3}{2}} (3 + 5x^{-\frac{1}{2}})^3 = x^{\frac{7}{2}} (3 + 5x^{-\frac{1}{2}})^3$.

§. 198.

Da sich Binomien mit zwey veränderlichen Gliedern auf eine solche Form bringen lassen, daß Ein Glied beständig wird (§. 197.),

so wird dadurch die Integrirung von Differentialen, deren Coefficienten Potenzen von Binomien sind, auf die Integrirung der Differential-Größen von der Form: $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ zurück geführt.

§. 199.

Man setze das Binomium $\alpha + \beta x^n$ einer solchen Differential-Größe $= z$, so wird $x = \frac{(z-\alpha)^{\frac{1}{n}}}{\beta^{\frac{1}{n}}}$; folglich $x^m = \frac{(z-\alpha)^{\frac{m}{n}}}{\beta^{\frac{m}{n}}}$ und

$$d x = \frac{d z (z-\alpha)^{\frac{1}{n}-1}}{n \beta^{\frac{1}{n}}} \text{ (§. 135.); mithin } x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$$

$$= z^p d z (z-\alpha)^{\frac{m+1}{n}-1} : n \beta^{\frac{m+1}{n}}.$$

Durch diese Substitution wird also die Integrirung des Differentiales: $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ auf die Integrirung von $z^p d z \times (z-\alpha)^{\frac{m+1}{n}-1}$ gebracht; ist nun $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, so kann also das Integrale nach §. 196. immer vollständig angegeben werden, was auch p für eine Zahl seyn mag.

Beyspiel I.

$x^3 d x (2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren. —

Da $\frac{3+1}{2} = 2$ eine ganze positive Zahl ist, so setze man $2 + x^2 = z$; dann wird $x = (z-2)^{\frac{1}{2}}$, $x^3 = (z-2)^{\frac{3}{2}}$ und $d x = \frac{1}{2} d z (z-2)^{-\frac{1}{2}}$; mithin $\int x^3 d x (2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \int (z-2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} d z (z-2)^{-\frac{1}{2}} \times z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} d z (z-2) = \frac{1}{2} \int (z^{\frac{3}{2}} d z - 2 z^{\frac{1}{2}} d z) = \frac{1}{2} (\frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} z^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{5} z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{15} (3z - 10) z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{15} (6 + 3x^2 - 10)(2+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{15} (3x^2 - 4)(2+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Beyspiel II.

$d x (x^5 - 3 x^6)^{\frac{2}{5}}$ zu integriren. —

Man schaffe die veränderliche Größe aus dem ersten Gliede des Binomiums weg (§. 197.); dadurch erhält man $d x (x^5 - 3x^6)^{\frac{2}{5}} = x^2 d x (1 - 3x)^{\frac{2}{5}}$, und es ist $\frac{2+1}{1} = 3$ eine ganze positive Zahl; daher setze man $1 - 3x = z$, so wird $x = \frac{1-z}{3}$, $x^2 = \frac{(1-z)^2}{9}$ und $d x = -\frac{d z}{3}$; folglich $\int d x (x^5 - 3 x^6)^{\frac{2}{5}} = \int x^2 d x (1 - 3 x)^{\frac{2}{5}} = \int \frac{(1-z)^2}{9} \times -\frac{d z}{3} \times z^{\frac{2}{5}} = -\frac{1}{27} \int z^{\frac{2}{5}} \cdot d z (1-z)^2 = -\frac{1}{27} \int (z^{\frac{2}{5}} d z - 2 z^{\frac{7}{5}} d z + z^{\frac{12}{5}} d z) = -\frac{1}{27} (\frac{5}{7} z^{\frac{7}{5}} - \frac{5}{6} z^{\frac{12}{5}} + \frac{5}{17} z^{\frac{17}{5}}) = -\frac{1}{19278} (510 - 595 z + 210 z^2) z^{\frac{7}{5}} = -\frac{1}{19278} (510 - 595 + 1785 x + 210 - 1260 x + 1890 x^2) \cdot (1-3x)^{\frac{7}{5}} = -\frac{1}{19278} (125 + 525 x + 1890 x^2) (1-3x)^{\frac{7}{5}} = -\frac{5}{19278} (25 + 105 x + 378 x^2) (1-3x)^{\frac{7}{5}}$.

§. 200.

Schafft man die veränderliche Größe aus dem einen Gliede des Binomiums in das andere, so wird $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p = x^{m+np} d x (\alpha x^{-n} + \beta)^p$ (§. 197.); das Integrale des auf diese Form gebrachten Differentiales kann daher nach §. 199. immer vollständig angegeben werden, wenn $\frac{(m+np)+1}{-n} = -\frac{m+1}{n} - p$ eine ganze positive, also $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze negative Zahl ist.

Beyspiel I.

Das Integrale von $x^{-2} d x (a^3 - x^3)^{-\frac{2}{3}}$ zu suchen. —

Weil $\frac{-2+1}{3} - \frac{2}{3} = -1$ eine ganze negative Zahl ist, so

schaffe man x^3 aus dem zweyten Gliede weg; dadurch wird $x^{-2} dx (a^3 - x^3)^{-\frac{2}{3}} = x^{-4} dx (a^3 x^{-3} - 1)^{-\frac{2}{3}}$. Nun setze man $a^3 x^{-3} - 1 = z$, so wird $x = \frac{(z+1)^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}}$, $x^{-4} = \frac{(z+1)^{\frac{4}{3}}}{a^4}$,

$dx = -\frac{1}{3a^{-1}} dz (z+1)^{-\frac{4}{3}}$, also $\int x^{-2} dx (a^3 - x^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= \int x^{-4} dx (a^3 x^{-3} - 1)^{-\frac{2}{3}} = \int \frac{(z+1)^{\frac{4}{3}}}{a^4} \cdot -\frac{1}{3a^{-1}} dz (z+1)^{-\frac{4}{3}}$.

$z^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3a^3} \int z^{-\frac{2}{3}} dz = -\frac{1}{3a^3} \times 3 z^{\frac{1}{3}} = -\frac{(a^3 x^{-3} - 1)^{\frac{1}{3}}}{a^3} =$

$-\frac{(a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}}}{a^3 x}$.

Beyspiel II.

$x^{\frac{2}{3}} dx (x^{-\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{4}{3}}$ zu integriren. —

Es ist $(\frac{2}{3} + 1) : -\frac{1}{2} = \frac{5}{3} \times -2 = -\frac{10}{3}$, und $(\frac{2}{3} + 1) : -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} = -2$; also verwandle man $x^{\frac{2}{3}} dx (x^{-\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{4}{3}}$ in $x^0 dx (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}$, und setze $1 - x^{\frac{1}{2}} = z$, so wird $x = (1-z)^2$, und $dx = -2 dz (1-z)$; folglich $\int x^{\frac{2}{3}} dx (x^{-\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{4}{3}} = \int dx (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = \int -2 dz (1-z) z^{\frac{4}{3}}$

$= -2 \int (z^{\frac{4}{3}} dz - z^{\frac{7}{3}} dz) = -2 (\frac{3}{7} z^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} z^{\frac{10}{3}}) = -\frac{1}{35} (30 - 21 z) z^{\frac{7}{3}} = -\frac{1}{35} (30 - 21 + 21 x^{\frac{1}{2}}) (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{7}{3}} = -\frac{3}{35} \cdot (3 + 7 x^{\frac{1}{2}}) (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{7}{3}}$.

§. 201.

Außer den in den beyden vorhergehenden Paragraphen angegebenen Fällen, in welchen sich $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ integriren läßt, sind noch die folgenden merkwürdig, welche aber ganz bestimmte Werthe von p voraus setzen.

1.) Man findet $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} L(a+bx)$ und $\int \frac{dx}{a-bx} =$

$-\frac{1}{b} L(a-bx)$ (§. 195.), und es ist $\frac{dx}{a+bx} + \frac{dx}{a-bx} =$

$\frac{2adx}{a^2-b^2x^2}$, also $\frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{dx}{a+bx} + \frac{dx}{a-bx}\right)$; mithin

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{a+bx} + \int \frac{dx}{a-bx}\right) =$$

$$\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{b} L(a+bx) - \frac{1}{b} L(a-bx)\right] = \frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right).$$

Auch ist $\frac{dx}{bx+a} - \frac{dx}{bx-a} = -\frac{2adx}{b^2x^2-a^2}$, woraus

$$\frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{dx}{bx+a} - \frac{dx}{bx-a}\right), \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{bx+a} - \int \frac{dx}{bx-a}\right) \text{ folgt.}$$

Da aber $\int \frac{dx}{bx+a} = \frac{1}{b} L(bx+a)$ und $\int \frac{dx}{bx-a} = \frac{1}{b} L(bx-a)$

ist, so ist $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{bx+a}{bx-a}\right)$.

Man hat daher

$$\int \frac{dx}{\pm a^2 \mp b^2x^2} = \pm \frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{\pm a \mp bx}\right), \text{ oder, wenn man}$$

α statt a^2, β statt b^2 schreibt, und $x^2 = v^n$ setzt, (wodurch

$x = v^{\frac{n}{2}}$, mithin $dx = \frac{n}{2} v^{\frac{n}{2}-1} dv$ wird),

$$\int \frac{n}{2} \cdot \frac{v^{\frac{n}{2}-1} dv}{\pm \alpha \mp \beta v^n} \text{ oder } \frac{n}{2} \int v^{\frac{n}{2}-1} dv (\pm \alpha \mp \beta v^n)^{-1} =$$

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} L\left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta v^n}}{\pm \sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta v^n}}\right), \text{ und aus diesem ist}$$

$$\int v^{\frac{n}{2}-1} dv (\pm \alpha \mp \beta v^n)^{-1} = \pm \frac{1}{n\sqrt{\alpha\beta}} L\left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta v^n}}{\pm \sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta v^n}}\right),$$

nämlich, wenn man die veränderliche Größe mit x bezeichnet,

$$= \text{I.)} \int x^{\frac{n}{2}-1} \, dx \, (\pm \alpha \mp \beta x^n)^{-1} = \frac{1}{\pm n\sqrt{\alpha\beta}} L\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x^n}}{\pm\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta x^n}}\right).$$

$x^m \, dx \, (\alpha + \beta x^n)^p$ läßt sich daher integriren, wenn bey ungleichen Zeichen der Glieder des Binomiums, $p = -1$ und $m = \frac{n}{2} - 1$, also $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ ist.

2.) Das Differentiale: $\frac{dx}{\sqrt{\beta x^2 \pm \alpha}}$ wird rational, wenn man $\sqrt{\beta x^2 \pm \alpha} = z - x\sqrt{\beta}$ setzt; denn es folgt aus diesem, $\beta x^2 \pm \alpha = z^2 - 2xz\sqrt{\beta} + \beta x^2$, mithin $x = \frac{z^2 \mp \alpha}{2z\sqrt{\beta}}$ und $\sqrt{\beta x^2 \pm \alpha}$

$$= z - \frac{z^2 \mp \alpha}{2z} = \frac{z^2 \mp \alpha}{2z}.$$

Ferner wird $dx = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \cdot \frac{2z^2 dz - (z^2 \mp \alpha) dz}{z^2} = \frac{dz(z^2 \pm \alpha)}{2z^2\sqrt{\beta}}$;

also $\frac{dx}{\sqrt{\beta x^2 \pm \alpha}} = \frac{dz(z^2 \pm \alpha)}{2z^2\sqrt{\beta}} : \frac{z^2 \pm \alpha}{2z} = \frac{dz}{z\sqrt{\beta}}$.

Es ist daher $\int \frac{dx}{\sqrt{\beta x^2 \pm \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} Lz =$

$\frac{1}{\sqrt{\beta}} L(x\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta x^2 \pm \alpha})$.

Setzt man $x^2 = v^n$, also $x = v^{\frac{n}{2}}$ und $dx = \frac{n}{2} v^{\frac{n}{2}-1} dv$, so erhält man aus dem eben gefundenen Integrale das allgemeinere,

$$\int \frac{n}{2} \cdot \frac{v^{\frac{n}{2}-1} dv}{\sqrt{\beta v^n \pm \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} L(v^{\frac{n}{2}}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta v^n \pm \alpha}) \text{ und}$$

$$\int v^{\frac{n}{2}-1} dv \beta (v^n \pm \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\beta}} L(\sqrt{\beta v^n} + \sqrt{\beta v^n \pm \alpha});$$

oder, wenn man wieder x statt v schreibt,

II.) $\int x^{\frac{n}{2}-1} dx (\beta x^n \pm \alpha)^{-\frac{1}{2}} =$

$\frac{2}{n\sqrt{\beta}} L (\sqrt{\beta x^n} + \sqrt{\beta x^n \pm \alpha})$.

Es läßt sich also $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ auch dann integriren, wenn das veränderliche Glied des Binomiums positiv, $p = -\frac{1}{2}$ und $m = \frac{n}{2} - 1$, nämlich $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ ist.

3.) Durch die Wegschaffung der veränderlichen Größe aus dem ersten Gliede des Binomiums im vorhergehenden Differentiale erhält man

$x^{\frac{n}{2}-1} dx (\beta x^n \pm \alpha)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1} dx (\beta \pm \alpha x^{-n})^{-\frac{1}{2}}$

(§. 197.); also ist auch

$\int x^{-1} dx (\beta \pm \alpha x^{-n})^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\beta}} L (\sqrt{\beta x^n} + \sqrt{\beta x^n \pm \alpha})$;

oder, wenn man der Gleichförmigkeit wegen das beständige Glied dieses Binomiums wieder mit α, den Coefficienten des veränderlichen Gliedes mit β, und den Exponenten der in diesem Gliede vorkommenden Potenz von x mit n bezeichnet,

$\int x^{-1} dx (\alpha \pm \beta x^n)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{n\sqrt{\alpha}} L (\sqrt{\alpha x^{-n}} + \sqrt{\alpha x^{-n} \pm \beta})$

$= -\frac{2}{n\sqrt{\alpha}} L \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^n}} + \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta x^n}}{\sqrt{x^n}} \right)$; nämlich

III.) $\int x^{-1} dx (\alpha \pm \beta x^n)^{-\frac{1}{2}} =$

$-\frac{2}{n\sqrt{\alpha}} L \left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha \pm \beta x^n}}{\sqrt{x^n}} \right)$.

Dadurch ist also $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ integrirt, wenn das beständige Glied des Binomiums positiv, $p = -\frac{1}{2}$, und $m = -1$, also $\frac{m+1}{n} = 0$ ist.

Beyspiel.

$x^{-\frac{1}{4}} dx (25 - 2x^{\frac{3}{2}})^{-1}$ zu integriren. —

Weil $(-\frac{1}{4}+1):\frac{3}{2}=\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, und der Exponent der Potenz des Binomiums $=-1$ ist, so ist das gegebene Differentiale unter I. begriffen; folglich, wenn man $\alpha=25$, $\beta=2$ und $n=\frac{3}{2}$ setzt, $\int x^{-\frac{1}{4}} dx\,(25-2x^{\frac{3}{2}})^{-1}=\frac{2}{3\sqrt{50}}$.

$$L\left(\frac{5+\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}{5-\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{15}L\left(\frac{5+\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}{5-\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}\right).$$

Um den Werth dieses Integrales für einen bestimmten Werth von x, z. B. für $x=1{,}3$ zu erhalten, wenn man bloß mit den Tafeln der gemeinen Logarithmen versehen ist, rechne man auf folgende Art:

log.	x	=	0,1139434
log.	x^3	=	0,3418302
log.	$x^{\frac{3}{2}}$	=	0,1709151
log.	2	=	0,3010300
log.	$2x^{\frac{3}{2}}$	=	0,4719451
log.	$\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}$	=	0,2359725
	$\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}$	=	1,72176
	$5+\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}$	=	6,72176
	$5-\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}$	=	3,27824
log.	$(5+\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}})$	=	0,8274830
log.	$(5-\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}})$	=	0,5156407
log	$\left(\frac{5+\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}{5-\sqrt{2x^{\frac{3}{2}}}}\right)$	=	0,3118423

0,	0,000000000
3	6,907755 3
1	2,302585
1	2,30259
8	18,4207
4	9,210
2	4,61
3	6,9
	0,7180434

$$L\left(\frac{5+\sqrt{2\,x^{\frac{3}{2}}}}{5-\sqrt{2\,x^{\frac{3}{2}}}}\right) = 0{,}7180434 \text{ (§. 163.)}$$

log. 0,7180434 = 0,8561506 — 1

log. $\sqrt{2}$ = 0,1505150

C. d. log. 15 = 8,8269087

0,8305743 — 2 =

log. 0,06769776.

Mithin ist für $x = 1{,}3$ ohne Rücksicht auf die allenfalls zugehörige beständige Größe (§. 137.),

$$\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx\,(25 - 2\,x^{\frac{3}{2}})^{-1} = 0{,}06769776.$$

Anmerkung.

Man kann $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$ (nro. 1.) unmittelbar aus $\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$ ableiten; denn es ist $\frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{dx}{a^2-b^2x^2}$, also $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$.

Es wurde aber $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{bx+a}{bx-a}\right)$ gefunden, welches eben so viel als $-\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx} \times -1\right)$ oder $-\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) - \frac{1}{2ab} L(-1)$ ist. Diese beyden Werthe von $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$ sind also nur um die beständige Größe $\frac{1}{2ab} L(-1)$ von einander unterschieden, und führen auf einerley Werth einer Größe y, für welche die Gleichung $dy = \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$ gegeben ist.

Es ist nämlich aus dieser Gleichung, $y = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{bx+a}{bx-a}\right) + C$ (§. 184.), wenn man das Integrale unter der einen, und $y = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) + C'$, wenn man es unter der andern Form nimmt; sind nun f und g ein Paar zusammen gehörige Werthe von x und y, so hat man

$g = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{bf+a}{bf-a}\right) + C$, und $g = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bf}{a-bf}\right) + C'$, also $C = g + \frac{1}{2ab} L\left(\frac{bf+a}{bf-a}\right)$ und $C' =$

$g + \frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bf}{a-bf}\right)$; daher ist ein Mal

$$y = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{bx+a}{bx-a}\right) + g + \frac{1}{2ab} L\left(\frac{bf+a}{bf-a}\right) =$$

$$g + \frac{1}{2ab} L\left[\frac{(bf+a)(bx-a)}{(bf-a)(bx+a)}\right], \text{ und auch}$$

$$y = -\frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) + g + \frac{1}{2ab} L\left(\frac{a+bf}{a-bf}\right) =$$

$$g + \frac{1}{2ab} L\left[\frac{(a+bf)(a-bx)}{(a-bf)(a+bx)}\right], \text{ welcher Werth von y mit dem}$$

vorhergehenden einerley ist.

Da überhaupt $d.\, L(ax) = d(La + Lx) = d\,L(x)$ (§. 130. nro. 1.) $= \frac{dx}{x}$ ist, so könnte man, wenn $dy = \frac{dx}{x}$ gegeben wäre, $y = \int \frac{dx}{x} + C = L(ax) + C$ setzen; allein weil für zusammen gehörige Werthe, f von x, und g von y, $g = L(af) + C$, mithin $C = g - L(af)$ ist, so erhält man $y = L(ax) + g - L(af) = g\,L\left(\frac{ax}{af}\right) = g\,L\left(\frac{x}{f}\right)$ eben so, wie wenn man $a = 1$, oder $\int \frac{dx}{x} = Lx$ gesetzt hätte.

§. 202.

Durch die Differerentiirung von $x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}$ erhält man

$$d.x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1} = (m+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} + n(p+1)\beta x^{m+n} dx(\alpha+\beta x^n)^p.$$

Im letzten Gliede dieses Differentiales ist der zweyte Theil βx^n des Binomiums $(\alpha+\beta x^n)$ mit $n(p+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p$ multiplicirt.

Multiplicirt man mit dieser Größe auch den ersten Theil α, und addirt das Product zum gefundenen Differentiale, so gibt dieses:

$$d.x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1} + n(p+1)\alpha x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p =$$
$$(m+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} + n(p+1)\beta x^{m+n} dx(\alpha+\beta x^n)^p$$
$$+ n(p+1)\alpha x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p =$$
$$(m+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} + n(p+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p$$
$$(\alpha+\beta x^n) =$$
$$(m+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} + n(p+1)x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1}$$
$$= [m+1+n(p+1)]x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1}, \text{ woraus sowohl}$$

$$x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} = \frac{d.x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{m+1+n(p+1)}$$
$$+ \frac{n(p+1)\alpha}{m+1+n(p+1)}.x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p, \text{ als auch}$$

$$x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p = -\frac{d.x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{n(p+1)\alpha}$$
$$+ \frac{[m+1+n(p+1)]}{n(p+1)\alpha}.x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} \text{ folgt.}$$

Die Integrirung dieser beyden letzten Ausdrücke gibt daher

$$A) \int x^m dx(\alpha+\beta x^n)^{p+1} = \frac{x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{m+1+n(p+1)}$$
$$+ \frac{n(p+1)\alpha}{m+1+n(p+1)} \int x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p, \text{ und}$$

$$\int x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p = -\frac{x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{n(p+1)\alpha} + \frac{[m+1+n(p+1)]}{n(p+1)\alpha}\int x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^{p+1}.$$

Da keine besondere Beziehung zwischen p und den übrigen vorkommenden Größen vorausgesetzt wurde, so ist also auch, wenn man im letzten Integrale, $p-1$ statt p schreibt,

$$\text{B)}\ \int x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^{p-1} = -\frac{x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^p}{np\alpha} + \frac{(m+1+np)}{np\alpha}\int x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p.$$

§. 203.

Das im vorhergehenden §. entwickelte Differentiale läßt sich auch so darstellen:

$$\text{d.}\,x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1} = (m+1)x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p(\alpha+\beta x^n)$$
$$+n(p+1)\beta x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p =$$
$$(m+1)\alpha x^m\,dx(\alpha+\beta x^n)^p + (m+1)\beta x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p$$
$$+n(p+1)\beta x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p =$$
$$(m+1)\alpha x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p +$$
$$[m+1+n(p+1)]\beta x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p,$$

und daraus ist sowohl

$$x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p = \frac{\text{d.}\,x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{[m+1+n(p+1)]\beta} - \frac{(m+1)\alpha}{[m+1+n(p+1)]\beta}\cdot x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p,$$

auch

$$x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p = \frac{\text{d.}\,x^{m+1}(\alpha+\beta x^n)^{p+1}}{(m+1)\alpha} - \frac{[m+1+n(p+1)]\beta}{(m+1)\alpha}\cdot x^{m+n}\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p.$$

Daraus folgen wieder die Integralen:

C) $\int x^{m+n} d x (\alpha + \beta x^n)^p = \frac{x^{m+1} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{[m+1+n(p+1)]\beta}$

$$- \frac{(m+1)\alpha}{[m+1+n(p+1)]\beta} \int x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p \text{ und}$$

$$\int x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p = \frac{x^{m+1} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{(m+1)\alpha}$$

$$- \frac{[m+1+n(p+1)]\beta}{(m+1)\alpha} \int x^{m+n} d x (\alpha + \beta x^n)^p .$$

Aus eben demselben Grunde, aus welchem im vorhergehenden §., $p-1$ statt p gesetzt werden durfte, kann im letzten Integrale auch $m-n$ statt n gesetzt werden, wodurch man

D) $\int x^{m-n} d x (\alpha + \beta x^n)^p = \frac{x^{m+1-n} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{(m+1-n)\alpha}$

$$- \frac{(m+1+np)\beta}{(m+1-n)\alpha} \cdot \int x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p \text{ erhält.}$$

§. 204.

Die vier Formeln: A, B (§. 202.), C, D (§. 203.) geben an, wie die Integralen der Differentialen $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^{p \pm 1}$, $x^{m \pm n} d x (\alpha + \beta x^n)^p$ durch das Integrale des Differentiales $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ bestimmt werden; sie können also gefunden werden, wenn das letztere bekannt ist.

Weil durch diese Formeln die Integrirung eines Differentiales auf die Integrirung eines andern zurück geführt wird, so heißen dieselben, Verwandlungs- oder Reductions-Formeln.

§. 205.

Wenn das Integrale eines binomischen Differentiales von der bisher angenommenen Form für einen gewissen Werth g des Exponenten der Potenz des Binomiums bekannt ist, und man subsumirt dieses Differentiale unter $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$, so findet man durch die erste Verwandlungsformel (A, §. 202.) das

Integrale für den Exponenten g + 1. Setzt man in eben derselben Verwandlungsformel, p = g + 1, so erhält man das Integrale für den Werth g + 2 des Exponenten, aus diesem für g + 3 u. s. f.

Bedient man sich auf eben dieselbe Art der zweyten Verwandlungsformel (B, §. 202.) statt der ersten, so erhält man der Ordnung nach das Integrale für die Werthe g — 1, g — 2, g — 3 ꝛc. des Exponenten.

Aus diesem folgt, daß man das Integrale eines binomischen Differentiales aus dem bekannten Integrale eines andern vermittelst der beyden ersten Verwandlungsformeln finden könne, wenn die Verschiedenheit der Differentialen nur darin besteht, daß die Differenz der Exponenten bey den Potenzen des Binomiums eine ganze Zahl ist.

§. 206.

Ist das Integrale eines binomischen Differentiales für einen gewissen Werth f des Exponenten der Potenz von x außerhalb des Binomiums bekannt, so findet man durch Subsumirung dieses Differentiales unter $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ durch die dritte Verwandlungsformel (C, §. 203.) das Integrale für den Werth f + n des Exponenten; dann für den Werth f + 2n, wenn man m = f + n setzt; aus diesem für den Werth f + 3n u. s. f.

Wenn man aber die vierte Verwandlungsformel (D, §. 203.) anwendet, so findet man eben so nach einander die Integralen für die Werthe f — n, f — 2n, f — 3n u. s. w. dieses Exponenten.

Man kann daher aus dem bekannten Integrale eines binomischen Differentiales vermittelst der dritten und vierten Verwandlungsformel das Integrale eines andern finden, wenn diese Differentialen nur darin verschieden sind, daß der Unterschied der Exponenten, welche den

Potenzen der veränderlichen Größe außerhalb des Binomiums zugehören, ein Vielfaches vom Exponenten der Potenz der veränderlichen Größe im Binomium gibt; also, wenn die Differenz der erstern Exponenten durch den letztern theilbar ist.

§. 207.

Wenn die beyden in §. 205. und §. 206. angegebenen Unterschiede bey zwey binomischen Differentialen zugleich Statt haben, so läßt sich ebenfalls das Integrale des einen durch das Integrale des andern angeben; denn durch die in §. 205. angezeigte Anwendung einer von den beyden ersten Verwandlungsformeln kann die Integrirung auf den in §. 206. angegebenen Fall gebracht werden.

§. 208.

1) Aus §. 201. nro. 1. ist $\int x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ bekannt, wenn $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$, $p = -1$ ist, und die Glieder des Binomiums entgegen gesetzte Zeichen haben; also kann man dieses Integrale nach §. 207. für jede ganze negative Zahl p finden, wenn bey ungleichen Zeichen der Glieder des Binomiums, $\frac{m+1}{n}$ ein Bruch ist, welcher die Zahl 2 zum Nenner hat; denn wenn $\frac{k}{2}$ diesen Bruch, also k eine ganze positive oder negative ungerade Zahl bezeichnet, so ist für das gesuchte Integrale der Werth von $m = \frac{nk}{2} - 1$, für das bekannte aber $= \frac{n}{2} - 1$, folglich die Differenz davon $= \frac{nk}{2} - \frac{n}{2}$, welche durch n dividirt, den Quotienten $\frac{k-1}{2}$, mithin eine ganze Zahl gibt.

2.) Nach nro. 2. eben desselben §. ist $\int x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ bekannt, wenn bey positivem Werthe des veränderlichen Gliedes, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$ ist; also findet man dieses Integrale auch, wenn bey positivem Werthe des veränderlichen Gliedes, $\frac{m+1}{n}$ sowohl, als auch p Brüche sind, welche 2 zum Renner haben (§. 207.).

3.) Endlich ist $\int x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ noch bekannt, wenn $m = -1$, $p = -\frac{1}{2}$, und das beständige Glied des Binomiums positiv ist (§. 201. nro. 3.); folglich findet man dieses Integrale auch dann (nach §. 207.), wenn bey positivem Werthe des beständigen Gliedes im Binomium, p ein Bruch mit dem Renner 2, und $\frac{m+1}{n}$ eine ganze negative Zahl oder Null ist; denn wenn $-k$ diese Zahl ist, so ist für das gesuchte Integrale, $m = -nk-1$, für das bekannte ist $m = -1$; also ist die Differenz davon $= -nk$, welche durch n dividirt, die ganze Zahl $-k$ zum Quotienten gibt.

Anmerkung.

Wenn die Differenz der Werthe von p im gesuchten und bekannten Integrale eine ganze Zahl > 1 ist, so dient es zur Erleichterung der Rechnung, wenn man bey der Subsumirung des Differentiales, dessen Integrale man kennt, unter $x^m d x (\alpha + \beta x^n)^p$ die Zahl p anfangs unbestimmt läßt.

Eben so kann man bey der Anwendung der dritten und vierten Verwandlungs-Formel anfangs m unbestimmt lassen, wenn die Differenz der Werthe von m beym gesuchten und bekannten Integrale durch n dividirt, eine ganze Zahl > 1 gibt.

Beyspiel I.

$\int x^{\frac{1}{2}} d x (4 - x^3)^{-2}$ anzugeben. —

Da $(\frac{1}{2} + 1) : 3 = \frac{1}{2}$, und der Exponent des Binomiums,

bey ungleichen Zeichen der Glieder eine ganze negative Zahl ist, so wird das Integrale aus dem bekannten I. (§. 201.) gefunden (§. 208. nro. 1.).

Man setze nämlich in der Formel I. (§. 201.), $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $n = 3$ und nehme die obern Zeichen, so erhält man

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx (4 - x^3)^{-1} = \frac{1}{6} L \left(\frac{2 + \sqrt{x^3}}{2 - \sqrt{x^3}} \right).$$

Man hat also $\int x^{\frac{1}{2}} dx (4 - x^3)^{-2}$ aus

$\int x^{\frac{1}{2}} dx (4 - x^3)^{-1}$ zu bestimmen.

Dieses kann nun durch die zweyte Verwandlungsformel geschehen, weil die Differenz der Werthe von p in beyden Differentialen, nämlich $-2-(-1) = -1$ eine ganze negative Zahl ist (§. 205.).

Man setze daher in B (§. 202.), $\alpha = 4$, $\beta = -1$, $m = \frac{1}{2}$, $n = 3$ und $p = -1$; so wird $np\alpha = -12$, und $m + 1 + np = -\frac{3}{2}$, folglich

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx (4 - x^3)^{-2} = \frac{1}{12} x^{\frac{3}{2}} (4 - x^3)^{-1} + \frac{1}{8} \int x^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$(4 - x^3)^{-1} = \frac{1}{12} x^{\frac{3}{2}} (4 - x^3)^{-1} + \frac{1}{48} L \left(\frac{2 + \sqrt{x^3}}{2 - \sqrt{x^3}} \right).$$

Beyspiel II.

$x^6 dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren. —

Im gegebenen Differentiale sind $\frac{6+1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ Brüche, welche 2 zum Nenner haben, und das veränderliche Glied ist positiv; mithin kann das Integrale aus II. (§. 201.) vermittelst der Verwandlungsformeln abgeleitet werden (§. 208. nro. 2.).

Es ist nämlich, wenn man in der Formel II. (§. 201.), $\beta = 1$, $\alpha = a^2$ und $n = 2$ setzt, $\int dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = L (x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

Nun erhält man, da die beyden Differentialen $x^6 dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $x^0 dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nur in den Werthen des Exponenten m unterschieden sind, durch die Division der Differenz

dieser Werthe mit n, $\frac{6-0}{2} = 3$ zum Quotienten, welcher eine ganze positive Zahl ist; also setze man (§. 206.) in der dritten Verwandlungsformel (C, §. 203.) $\alpha = a^2$, $\beta = 1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$ und lasse m noch unbestimmt (§. 208. Anmerk.), so wird $[m+1+n(p+1)]\beta = m+2$, $(m+1)\alpha = (m+1)a^2$; daher

$$\int x^{m+2} dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{m+1}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{m+2} - \frac{(m+1)a^2}{m+2} \cdot \int x^m dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun setze man, da $\int x^m dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ das bekannte Integrale darstellen soll, $m = 0$, so erhält man

$$\int x^2 dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^2 \int dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^2 L(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

Dadurch ist $\int x^2 dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ gefunden; daher setze man in der vorhergehenden Formel, $m = 2$, wodurch man

$$\int x^4 dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^3(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}a^2 \int x^2 dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^3(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}a^2 x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}a^4 L(x+\sqrt{a+x^2})$$ findet.

Endlich setze man $m = 4$, so findet man das gesuchte $\int x^6 dx$.

$$(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^5(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6}a^2 \int x^4 dx (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{6}x^5(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{24}a^2x^3(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{16}a^4x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{5}{16}a^6 L(x+\sqrt{a^3+x^2}) =$$
$$\frac{1}{48}x(8x^4 - 10a^2x^2 + 15a^4)\sqrt{a^2+x^2}$$
$$- \frac{5}{16}a^6 L(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

Beyspiel III.

$\int x^{-6} dx (1-3x^5)^{\frac{3}{2}}$ zu finden. —

Es ist $(-6+1):5$ eine ganze negative Zahl, $\frac{3}{2}$ ein Bruch, welcher 2 als Nenner hat, und das beständige Glied des Bino-

miums positiv; daher läßt sich das gesuchte Integrale aus dem bekannten III. (§. 201.) ableiten (§. 208. nro. 3.).

Man erhält, wenn man in der Formel III. (§. 201.), $\alpha = 1$, $\beta = 3$ und $n = 5$ setzt,

$$\int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5} L \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 3x^5}}{\sqrt{x^5}} \right).$$

Aus diesem Integrale suche man nun zuerst $\int x^{-1} dx$. $(1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}}$ zu bestimmen, welches durch Hülfe der ersten Verwandlungsformel geschehen kann, weil in den Differentialen $x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}}$ und $x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{-\frac{1}{2}}$ die Differenz der Werthe von p, nämlich $\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = 2$ eine ganze positive Zahl ist (§. 205.).

Man setze also in der Formel A (§. 202.), $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $m = -1$, $n = 5$, und lasse p noch unbestimmt (§. 208. Anmerk.), so wird $m + 1 + n(p + 1) = 5(p + 1)$, $n(p + 1)\alpha = 5(p + 1)$ und daher $\int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{p+1} = \frac{(1 - 3x^5)^{p+1}}{5(p + 1)} + \int x^{-1} dx \times (1 - 3x^5)^p$.

Nun nehme man, damit $\int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^p$ das bekannte Integrale darstelle, $p = -\frac{1}{2}$, so findet man

$$\int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}(1 - 3x^5)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} L \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 3x^5}}{\sqrt{x^5}} \right),$$

und, wenn man jetzt in der vorhergehenden Formel, $p = \frac{1}{2}$ setzt,

$$\int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15}(1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} + \int x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{15}(1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1 - 3x^5)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} L \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 3x^5}}{\sqrt{x^5}} \right).$$

Aus diesem Integrale kann nun das gesuchte $\int x^{-6} dx$. $(1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}}$ abgeleitet werden, und zwar, weil in den Differentialen $x^{-6} dx (1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}}$ und $x^{-1} dx (1 - 3x^5)^{\frac{3}{2}}$ die Differenz der Werthe von m durch n getheilt, die ganze negative Zahl $\frac{-6-(-1)}{5} = -1$ gibt, durch die vierte Verwandlungsformel (§. 206.).

Man setze daher in D (§. 203.), $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $m = -1$, $n = 5$ und $p = \frac{3}{2}$, so bekömmt man $(m + 1 - n)\,\alpha = -5$ und $(m + 1 + n\,p)\,\beta = -\frac{45}{2}$, mithin

$$\int x^{-6}\,dx\,(1-3x^5)^{\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{5}x^{-5}(1-3x^5)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{9}{2}\int x^{-1}\,dx\,(1-3x^5)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{5}x^{-5}(1-3x^5)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{3}{5}(1-3x^5)^{\frac{3}{2}}$$

$$- \tfrac{9}{5}(1-3x^5)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{9}{5}L\left(\frac{1+\sqrt{1-3x^5}}{\sqrt{x^5}}\right)$$

$$= -\frac{(1+6x^5)\sqrt{1-3x^5}}{5x^5} + \tfrac{9}{5}L\left(\frac{1+\sqrt{1-3x^5}}{\sqrt{x^5}}\right).$$

Beyspiel IV.

$x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren. —

Wenn man dieses Differentiale unter $x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n)^p$ subsumirt, so ist $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$, und $p = \frac{1}{2}$; folglich $\frac{m+1}{n} = \frac{3}{4}$ und $\frac{m+1}{n} + p = \frac{5}{4}$, daher weder $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive, noch $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze negative Zahl; mithin kann das Integrale nicht nach §. 199. oder §. 200. angegeben werden.

Da aber auch $\frac{m+1}{n}$ weder eine ganze negative Zahl, noch ein Bruch mit dem Nenner 2 ist, so kann schon dieses Umstandes wegen das Integrale aus keinem andern bekannten nach §. 208. abgeleitet werden.

Es bleibt also nichts übrig, als nach §. 196. zu verfahren.

Man findet $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4\,a^3} + \frac{3x^6}{2.4.6\,a^5} - \frac{3.5\,x^8}{2.4.6.8\,a^7} + \ldots \text{(§. 12.)};$$

also ist

$$x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a\,x^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{2a} - \frac{x^{\frac{9}{2}}\,dx}{2.4\,a^3}$$

$$+\frac{3\,x^{\frac{13}{2}}\,dx}{2.4.6\,a^5} - \frac{3.5\,x^{\frac{17}{2}}\,dx}{2.4.6.8\,a^7} + \ldots;$$

folglich

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,a\,x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2\,x^{\frac{7}{2}}}{2.7\,a} - \frac{2\,x^{\frac{11}{2}}}{2.4.11\,a^3}$$

$$+\frac{2.3\,x^{\frac{15}{2}}}{2.4.6.15\,a^5} - \frac{2.3.5\,x^{\frac{19}{2}}}{2.4.6.8.19\,a^7} + \ldots$$

$$= x^2\sqrt{x}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{4.11}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{3}{4.6.15}\left(\frac{x}{a}\right)^5\right.$$

$$\left. - \frac{3.5}{4.6.8.19}\left(\frac{x}{a}\right)^7 + \ldots\right].$$

*§. 209.

Die Integrirung trinomischer Differentialen von der Form $x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})^p$ läßt sich folgender Gestalt auf die Integrirung von Binomien zurückführen.

Man setze $x^n = u$, so wird $\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n} = \gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}u+u^2\right)$.

Aus dem letzten Factor wird nun das mittlere Glied weggeschafft, wenn man $u = z - \frac{\beta}{2\gamma}$ setzt (§. 53.); also wird auch das mittlere Glied aus $\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}$ eliminirt, wenn man $x^n = z - \frac{\beta}{2\gamma}$ setzt, und man erhält dadurch

$$\alpha+\beta x^n+\gamma x^m = (\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}) + \gamma z^2,$$

$$x = (z - \frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{1}{n}\,dz\,(z - \frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{1}{n}-1} \text{ und}$$

$$x^m = (z - \frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{m}{n}},\ \text{mithin}$$

$$x^m\,dx\,(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})^p=$$

$$(z-\frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{m}{n}}\,\chi\,\frac{1}{n}\,dz\,(z-\frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{1}{n}-1}\,[(\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma})+\gamma z^2]^p=$$

$$\frac{1}{n}(z-\frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz\,[(\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma})+\gamma z^2]^p.$$

Sobald man nun das zuletzt gefundene Differentiale zu integriren weiß, so ist auch das Integrale des gegebenen Trinomiums bekannt.

Da sich aber das letztere unmittelbar aus §. 196. integriren läßt, wenn p eine ganze positive Zahl ist, und also die angeführte Substitution nur im entgegen gesetzten Falle gemacht wird, so läßt sich $(z-\frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz\,[(\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma})+\gamma z^2]^p$ nicht vollständig integriren, wenn nicht $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl ist.

Ist aber $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, so entwickle man die Potenz: $(z-\frac{\beta}{2\gamma})^{\frac{m+1}{n}-1}$, und multiplicire jedes Glied derselben mit $dz\,[(\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma})+\gamma z^2]^p$. Dadurch erhält man so viele Binomien, als die entwickelte Potenz Glieder hat, welche einzeln integrirt werden müssen.

Von diesen Binomien hat jedes die Form $z^q\,dz\,[(\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma})+\gamma z^2]^p$, und es kann q nur eine ganze positive Zahl oder Null seyn, weil der Voraussetzung gemäß $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl ist.

Auch ist in der Reihe dieser Binomien, q bald ungerade bald gerade; daher $\frac{q+1}{2}$ wechselsweise bald eine ganze positive Zahl, bald ein positiver Bruch mit dem Nenner 2.

Die Binomien der erstern Gattung können nach §. 199. integrirt werden, die der letztern aber nur dann, wenn entweder

1) p eine ganze negative Zahl ist, und die Zeichen der Glieder des Binomiums einander entgegen gesetzt sind (§. 208. nro. 1.) (welches Statt hat, sobald $4\alpha\gamma - \beta^2$ negativ ist); oder wenn

2) p ein Bruch mit dem Nenner 2, und dabey γ positiv ist (§. 208. nro. 2.).

Beyspiel.

$x^5\,dx\,(3 - 2x^3 + 4x^6)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren. —

Dieses Differentiale ist von der Form $x^m\,dx\,(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^P$, und es ist $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$, $p = -\frac{1}{2}$ und $\gamma = +4$ positiv; also läßt sich das Integrale davon durch die angeführte Substitution finden.

Man setze daher $x^3 = z + \frac{1}{4}$, so wird

$x = (z + \frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$, $x^5 = (z + \frac{1}{4})^{\frac{5}{3}}$, $dx = \frac{1}{3}\,dz\,(z + \frac{1}{4})^{-\frac{2}{3}}$ und $3 - 2x^3 + 4x^6 = \frac{11}{4} + 4z^2$, also

$x^5\,dx\,(3 - 2x^3 + 4x^6)^{-\frac{1}{2}} = (z + \frac{1}{4})^{\frac{5}{3}} \times \frac{1}{3}\,dz\,(z + \frac{1}{4})^{-\frac{2}{3}} \times (\frac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(z + \frac{1}{4})\,dz\,(\frac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}}$, und daher

$$\int x^5\,dx\,(3 - 2x^3 + 4x^6)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\int z\,dz\,(\tfrac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{12}\int dz\,(\tfrac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun findet man nach §. 199.

$\int z\,dz\,(\frac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\frac{11}{4} + 4z^2)^{\frac{1}{2}}$ und nach II, §. 201.

$\int dz\,(\frac{11}{4} + 4z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}L(2z + \sqrt{\frac{11}{4} + 4z^2})$; mithin ist

$$\int x^5\,dx\,(3 - 2x^3 + 4x^6)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{12}(\tfrac{11}{4} + 4z^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{24}L(2z + \sqrt{\tfrac{11}{4} + 4z^2})$$

$$= \tfrac{1}{12}\sqrt{3 - 2x^3 + 4x^6} + \tfrac{1}{24}L[2(x^3 - \tfrac{1}{4}) + \sqrt{3 - 2x^3 + 4x^6}],$$

weil $\frac{11}{4} + 4z^2 = 3 - 2x^3 + 4x^6$, und $z = x^3 - \frac{1}{4}$ ist.

* §. 210.

Man erhält durch Wegschaffung der veränderlichen Größe aus dem letzten Gliede des Trinomiums,

$x^m dx(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^p = x^{m+2np} dx(\alpha x^{-2n} + \beta x^{-n} + \gamma)^p$ (§. 197.).

Um dieses letzte Differentiale integriren zu können, muß vor Allem, $\frac{m+2np+1}{-n} = -(\frac{m+1}{n} + 2p)$ eine ganze positive Zahl, dann entweder p eine ganze negative Zahl, und dabey $4\alpha\gamma - \beta^2$ negativ, oder p ein Bruch mit dem Nenner 2, und zugleich α positiv seyn (§. 209.).

Ist nun bey einem trinomischen Differentiale von der Form $x^m dx(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^p$ zwar $\frac{m+1}{n}$ keine ganze positive, aber doch $\frac{m+1}{n} + 2p$ eine ganze negative Zahl, und haben dabey p, α, β und γ die eben angeführten Eigenschaften, so läßt sich also die Integrirung auf den Fall des vorhergehenden Paragraphes zurückführen, wenn man die veränderliche Größe aus dem letzten Gliede des Trinomiums wegschafft.

Beyspiel.

$x^{-1} dx(1 - 2x^{\frac{1}{2}} - x)^{-1}$ zu integriren. —

Die Subsumirung dieses Differentiales unter $x^m dx(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^p$ gibt $m = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$ und $\gamma = -1$; also ist $\frac{m+1}{n} = 0$, folglich keine ganze positive Zahl, aber $\frac{m+1}{n} + 2p = -2$ ist eine ganze negative Zahl; überdieß ist p eine ganze negative Zahl, und auch $4\alpha\gamma - \beta^2 = -8$ negativ.

Man verwandle demnach

$x^{-1} dx(1 - 2x^{\frac{1}{2}} - x)^{-1}$ in $x^{-2} dx(x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} - 1)^{-1}$

und setze $x^{-\frac{1}{2}} = z + 1$ (§. 209.), so wird $x = (z+1)^{-2}$, $x^{-2} = (z+1)^4$, $dx = -2\,dz(z+1)^{-3}$ und $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} - 1 = z^2 - 2$; mithin

$$x^{-1}\,dx\,(1 - 2x^{\frac{1}{2}} - x)^{-1} = (z+1)^4 \cdot -2\,dz\,(z+1)^{-3}.$$

$(z^2-2)^{-1} = -2(z+1)\,dz\,(z^2-2)^{-1}$, und daher

$$\int x^{-1}\,dx\,(1 - 2x^{\frac{1}{2}} - x)^{-1} = -2\left[\int z\,dz\,(z^2-2)^{-1} + \int dz.\,(z^2-2)^{-1}\right].$$

Aus §. 199. ist nun

$\int z\,dz\,(z^2-2)^{-1} = \frac{1}{2} L(z^2-2)$, und nach §. 201. I. findet man

$$\int dz(z^2-2)^{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} L\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right);$$ folglich ist

$$\int x^{-1}\,dx(1 - 2x^{\frac{1}{2}} - x)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} L\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right) - L(z^2-2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} L\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} - 1 + \sqrt{2}}{x^{-\frac{1}{2}} - 1 - \sqrt{2}}\right) - L(x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} L\left[\frac{1 + (\sqrt{2}-1)\sqrt{x}}{1 - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x}}\right] - L(1 - 2\sqrt{x} - x) + Lx.$$

* §. 211.

Wenn bey einem Trinomium $x^m\,dx\,(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^p$, $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, also $\gamma = \frac{\beta^2}{4\alpha}$ ist, so ist dasselbe

$$= x^m\,dx\,(\alpha + \beta x^n + \frac{\beta^2}{4\alpha} x^{2n})^p = x^m\,dx\left[\frac{1}{4\alpha}(2\alpha + \beta x^n)^2\right]^p$$

$$= \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^p x^m\,dx\,(2\alpha + \beta x^n)^{2p};$$ man hat daher bloß das Binomium $x^m\,dx\,(2\alpha + \beta x^n)^{2p}$ zu integriren.

* §. 212.

Rationale Brüche von der Form $\frac{dx}{\alpha + \beta x}$ und $\frac{dx}{\alpha\beta + x + \gamma x^2}$

sind binomische und trinomische Differentialen: $x^{\circ}\,dx\,(\alpha+\beta x)^{-1}$, $x^{\circ}\,dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-1}$, wovon sich das erste nach §. 195., das letzte aber nach §. 209. integriren läßt, wenn $4\alpha\gamma-\beta^2$ negativ ist. Für $4\alpha\gamma-\beta^2=0$ hingegen hat man

$\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=4\alpha\,dx\,(2\alpha+\beta x)^{-2}$ (§. 211.), welches ebenfalls nach §. 195. integrirt werden kann.

Nach eben demselben §. läßt sich auch

$\frac{dx}{(\alpha+\beta x)^n}=dx\,(\alpha+\beta x)^{-n}$ integriren.

Da $\frac{(A+Bx)\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=A\,dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-1}$

$+Bx\,dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-1}$

ist, so läßt sich dieser Bruch nach §. 209. integriren, wenn $4\alpha\gamma-\beta^2$ negativ ist; für $4\alpha\gamma-\beta^2=0$ ist derselbe $=$ $4A\alpha\,dx\,(2\alpha+\beta x)^{-2}+4B\alpha x\,dx\,(2\alpha+\beta x)^{-2}$, und kann daher nach §. 199. integrirt werden.

§. 213.

Erhält man durch die Zerlegung eines rationalen Bruches $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots)\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots}$ in Partial-Brüche (§. 106.) die letztern unter den so eben (§. 212.) angeführten Formen, so findet man das Integrale des Bruches durch die Integrirung dieser Partial-Brüche; im entgegen gesetzten Falle kann man das Integrale nur dann finden, wenn man zuerst den Bruch in eine Reihe auflöset (§. 98.).

Um Differentialen von der Form

$\frac{(a+bx^{\frac{m}{n}}+cx^{\frac{p}{q}}+\ldots)dx}{\alpha+\beta x^{\frac{r}{s}}+\gamma x^{\frac{t}{u}}+\ldots}$ zu integriren,

bringe man dieselben zuvor auf die Form von rationalen Brüchen. Dieses geschieht, wenn man eine Zahl N sucht, welche

durch jeden Nenner der Exponenten $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ ... $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ ... theilbar ist, $x = z^n$ setzt, und für x substituirt.

III. Abschnitt.

Von der Integrirung einiger Differentialen, welche Exponential-Größen oder Logarithmen enthalten, und von der Integrirung höherer Differentialen.

---

* §. 214.

Es sey X eine Function von x, und $X a^{mx} dx$ zu integriren.

Man setze $a^{mx} dx = dY$, so hat man

$\int X a^{mx} dx = \int X dY = XY - \int Y dX$ (§. 192.); also, da

$Y = \int a^{mx} dx = \frac{1}{m} \int a^{mx} m dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx}}{La}$ ist (§. 192.),

$\int X a^{mx} dx = \frac{X a^{mx}}{m La} - \frac{1}{m La} \int a^{mx} dX$, oder wenn man der Kürze wegen, $\frac{1}{m La}$ mit g bezeichnet,

$\int X a^{mx} dx = g(X a^{mx} - \int a^{mx} dX.)$

Nimmt man dx als beständig, so kann man $dX = p dx$, $d^2X = q dx^2$, $d^3X = r dx^3$, $d^4X = s dx^4$ u. s. f. setzen (§. 142.); dabey können p, q, r... nur Functionen von x seyn, und es ist auch

$d^2 X = d p\, d x$, $d^3 X = d q\, d x^2$, $d^4 X = d r\, d x^3$ ꝛc. (§. 143.), folglich $d p = q\, d x$, $d q = r\, d x$, $d r = s\, d x$ u. ſ. w.; mithin

$$\int X a^{mx} d x = g X a^{mx} - g \int a^{mx} d X = g X a^{mx} - g \int a^{mx} p\, d x,$$
$$\int p a^{mx} d x = g p a^{mx} - g \int a^{mx} d p = g p a^{mx} - g \int a^{mx} q\, d x,$$
$$\int q a^{mx} d x = g q a^{mx} - g \int a^{mx} d q = g q a^{mx} - g \int a^{mx} r\, d x,$$
$$\int r a^{mx} d x = g r a^{mx} - g \int a^{mx} d r = g r a^{mx} - g \int a^{mx} s\, d x.$$

Durch ſucceſſive Subſtitutionen erhält man alſo

$$\int X a^{mx} d x = g X a^{mx} - g^2 p a^{mx} + g^2 \int a^{mx} q\, d x$$
$$= g X a^{mx} - g^2 p a^{mx} + g^3 q a^{mx} - g^3 \int a^{mx} r\, d x$$
$$= g X a^{mx} - g^2 p a^{mx} + g^3 q a^{mx} - g^4 r a^{mx} + g^4 \int a^{mx} s\, d x;$$

daher iſt überhaupt

$$\int X a^{mx} d x = g a^{mx} (X - g p + g^2 q - g^3 r + \ldots)$$
$$= \frac{a^{mx}}{m L a} \left(X - \frac{d X}{(m L a) d x} + \frac{d^2 X}{(m L a)^2 d x^2} - \frac{d^3 X}{(m L a)^3 d x^3} + \ldots\right).$$

Es ſey z. B. $\int x^3 a^x d x$ zu finden. —

Da in dieſem Falle $X = x^3$, alſo $d X = 3 x^2 d x$, $d^2 X = 2 . 3 x\, d x^2$, $d^3 X = 2 . 3\, d x^3$, $d^4 X = 0$, $d^5 X = 0$ ꝛc. und $m = 1$ iſt, ſo wird

$$\int x^3 a^x d x = \frac{a^x}{L a} \left(x^3 - \frac{3 x^2}{L a} + \frac{2 . 3 x}{(L a)^2} - \frac{2 . 3}{(L a)^3}\right).$$

* §. 215.

In der vorhergehenden für $\int X a^{mx} d x$ gefundenen Formel ſey $a = e =$ der Grundzahl der natürlichen Logarithmen (§. 156.), $x = L z$ und $X = x^n = (L z)^n$, ſo iſt $L a = L e = 1$, $d x = z^{-1} d z$ und $a^{mx} = e^{mx} = (e^x)^m = z^m$;

ferner iſt

$$d X = d . x^n = n x^{n-1} d x, \frac{d X}{d x} = n (L z)^{n-1};$$

$$d^2 X = n (n-1) x^{n-2} d x^2, \frac{d^2 X}{d x^2} = n (n-1) (L z)^{n-2};$$

$$d^3 X = n (n-1)(n-2) x^{n-3} d x^3, \frac{d^3 X}{d x^3} = n (n-1)(n-2).$$

$(L z)^{n-3}$ u. ſ. w.; folglich

$$\int z^{m-1} (Lz)^n \, dz = \frac{z^m}{m} \left[(Lz)^n - \frac{n(Lz)^{n-1}}{m} + \frac{n(n-1)(Lz)^{n-2}}{m^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(Lz)^{n-3}}{m^3} + \ldots \right],$$ oder,

wenn man m statt $m-1$ und x statt z schreibt,

$$\int x^m (Lx)^n \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[(Lx)^n - \frac{n(Lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n(n-1)(Lx)^{n-2}}{(m+1)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(Lx)^3}{(m+1)^3} + \ldots \right].$$

Wenn n eine ganze positive Zahl ist, so findet man das Integrale in einer bestimmten Anzahl von Gliedern, wenn m nicht -1 ist; für $m = -1$ ist aber überhaupt

$\int x^m (Lx)^n \, dx = \int . x^{-1} \, dx (Lx)^n = \int . (Lx)^n \, dLx$

$= \frac{(Lx)^{n+1}}{n+1}$ (§. 190.), außer wenn $n = -1$ ist, in welchem Falle sich

$\int x^{-1} \, dx \, (Lx)^n = \int x^{-1} \, dx \, (Lx)^{-1} = L \, (Lx)$ findet, weil

$d . L(Lx) = dLx \times (Lx)^{-1} = x^{-1} \, dx \, (Lx)^{-1}$ ist.

§. 216.

Wenn $d^{n-1} f(x) = p \, dx^{n-1}$ und $d^n f(x) = q \, dx^n$ aus $f(x)$ unter der Voraussetzung, daß dx beständig sey, abgeleitet worden sind, so hat man $d^n f(x) = d . d^{n-1} f(x) = dp \, dx^{n-1}$ (§. 143.), folglich $dp = q \, dx$, woraus $p = \int q \, dx + \text{Const.}$ (§. 184.) folgt.

Man erhält daher, wenn $d^n f(x) = q \, dx^n$ gegeben ist, $d^{n-1} f(x) = dx^{n-1} (\int q \, dx + \text{Const.})$

Dieser Ausdruck enthält die Regel, nach welcher man verfahren muß, um aus einem höhern Differentiale einer Function einer einzigen veränderlichen Größe, deren Differentiale beständig ist, das der nächst niedern Ordnung zu finden.

Um aber Const. bestimmen zu können, muß der Werth von p oder $\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}$ für einen bestimmten Werth von x bekannt seyn (§. 185.).

Hat man $d^{n-1} f(x)$ gefunden, so erhält man daraus auf eben dieselbe Art $d^{n-2} f(x)$ u. s. w., bis man zuletzt $f(x)$ selbst findet.

Beyspiel.

Es sey $d^3 f(x) = x^{-3} dx^3$, und bekannt, daß für $x = \alpha$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = a$, für $x = \beta$, $\frac{df(x)}{dx} = b$, und für $x = \gamma$, $f(x) = c$ seyn müsse. —

Aus $d^3 f(x) = x^{-3} dx^3$ ist

$$d^2 f(x) = dx^2 (\int x^{-3} dx + C) = dx^2 (-\tfrac{1}{2} x^{-2} + C);$$

daraus folgt

$$df(x) = dx [\int (-\tfrac{1}{2} x^{-2} dx + C dx) + C']$$
$$= dx (\tfrac{1}{2} x^{-1} + C x + C'); \text{ mithin}$$
$$f(x) = \int (\tfrac{1}{2} x^{-1} dx + C x dx + C' dx) + C''$$
$$= \tfrac{1}{2} L x + \tfrac{1}{2} C x^2 + C' x + C''.$$

Die übrigen Bedingungen geben also, diesen Werthen von $d^2 f(x)$, $df(x)$, $f(x)$ zu Folge, die Gleichungen

$$a = -\tfrac{1}{2} \alpha^{-2} + C,$$
$$b = \tfrac{1}{2} \beta^{-1} + \beta C + C',$$
$$c = \tfrac{1}{2} L \gamma + \tfrac{1}{2} \gamma^2 C + \gamma C' + C'',$$

wodurch die beständigen Größen C, C', C'' bestimmt sind.

Sucht man daraus die Werthe dieser Größen, und substituirt dieselben in den für $f(x)$ gefundenen Ausdruck, so findet man endlich

$$f(x) = \tfrac{1}{2} L \left(\frac{x}{\gamma}\right) + \tfrac{1}{2} (a + \tfrac{1}{2} \alpha^{-2}) (x^2 - \gamma^2)$$
$$+ [b - \tfrac{1}{2} \beta^{-1} - (a + \tfrac{1}{2} \alpha^{-2}) \beta] (x - \gamma) + c.$$

Zweyte Abtheilung.

Höhere Geometrie.

I. Hauptstück.

Von den Linien in einer Ebene überhaupt.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung der Lage der Puncte in einer Ebene, und von den Gleichungen der Linien.

§. 217.

Fig. 1. XX′ und YY′ seyen zwey gerade, sich in A schneidende Linien, und M ein Punct in der Ebene dieser Linien zwischen den Schenkeln des Winkels XAY. Zieht man aus M die Linien, MP zu AY, und MQ zu AX parallel, so ist durch MP und MQ die Lage des Punctes M im Winkel XAY bestimmt.

Da auch M′P′ und M′Q′ die Lage des Punctes M′ im Winkel XAY bestimmen, wenn M′P′ ∥ AY, M′Q′ ∥ AX ist, und

M' in der Ebene dieses Winkels zwischen seinen Schenkeln liegt; so bestimmen MP, MQ, M'P', M'Q' und die Größe des Winkels XAY die Lage der Puncte M und M' gegen einander.

§. 218.

Wenn für einen Punct M die angeführten Linien gegeben sind, welche erfordert werden, um die Lage desselben in einem gegebenen Winkel auf die erwähnte Art zu bestimmen, so kann der Ort des Punctes durch folgende Construction gefunden werden:

Man ziehe eine unbestimmt lange gerade Linie X'X, nehme auf dieser einen willkürlichen Punct A, betrachte diesen Punct als Scheitel, und einen Theil AX der geraden Linie als den einen Schenkel des gegebenen Winkels. Dann nehme man auf AX das Stück AP so groß, als die aus M zu AX Parallele bis zu ihrem Durchschnitte mit dem andern Schenkel des gegebenen Winkels seyn soll, und ziehe durch P eine gerade Linie MP von der Größe der zum andern Schenkel parallelen Linie unter einem Winkel MPX, welcher dem gegebenen gleich ist. Der Endpunct M der Linie MP ist der Ort des Punctes; denn wenn man AY # PM und MQ # AX zieht, so ist XAY der gegebene Winkel, und MQ = AP.

Verfährt man eben so für mehrere andere Puncte, so erhält man alle diese Puncte in ihrer gegenseitigen Lage.

§. 219.

Man nennt bey dieser Art, die Lage der Puncte, welche in einer Ebene liegen, zu bestimmen, die Stücke AP, AP' ꝛc. auf dem Schenkel AX die Abscissen, und die Parallelen MP, M'P' ꝛc. die Ordinaten der Puncte M, M' ꝛc.

Die Abscisse und die Ordinate eines Punctes heißen gemeinschaftlich die Coordinaten dieses Punctes, und der Winkel MPX = M'P'X ꝛc., welchen die Coordinaten mit einander machen, heißt der Coordinaten-Winkel.

Man nennt die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig, jenachdem der Coordinaten-Winkel ein rechter oder ein schiefer Winkel ist.

Die Linie AX, auf welcher die Abscissen genommen werden, heißt die Abscissen-Linie, und der Punct A der Anfangspunct der Abscissen.

Weil die aus den Puncten M, M' ꝛc. zur Abscissen-Linie parallel gezogenen Linien auf AY Stücke abschneiden, welche den Ordinaten dieser Puncte gleich sind, wenn AY zu den Ordinaten parallel ist, so heißt AY die Ordinaten-Linie.

§. 220.

Wenn eine krumme Linie ganz in einer Ebene liegt, so heißt dieselbe eine Linie von einfacher Krümmung; liegt aber kein Theil einer Linie in einer Ebene, so nennt man sie eine Linie von doppelter Krümmung.

Anmerkung.

Von den Linien der letztern Gattung wird nur im letzten Hauptstücke gehandelt.

§. 221.

Fig. 2. Es sey BD eine Linie, in welcher die Lage ihrer Puncte gegen einander durch irgend ein Gesetz bestimmt ist, und in einer bestimmten Lage gegen BD sey in der Ebene dieser Linie die gerade Linie X'X gezogen.

Nimmt man X'X als Abscissen-Linie, einen Punct A in ihr als Anfangspunct, und zieht aus willkührlichen Puncten M, M' der Linie BD unter einem bestimmten Coordinaten-Winkel die Ordinaten MP, M'P' dieser Puncte, so werden dadurch die Abscissen derselben, AP, AP' bestimmt.

Nimmt man umgekehrt AP, AP' so groß, als die durch beliebige Puncte M, M' der Linie BD zur Abscissen-Linie Parallelen, bis zu ihrem Durchschnitte mit der Ordinaten-Linie sind, und zieht durch P und P' gerade Linien zur Ordinaten-Linie

parallel, so gehen diese Linien durch die Puncte M, M'; also werden die Ordinaten von Puncten der Linie B D durch ihre Abscissen bestimmt.

Bey den angeführten Voraussetzungen bestimmen sich also die Coordinaten eines jeden Punctes der Linie B D wechselseitig; wenn man daher die Coordinaten eines beliebigen, also unbestimmten Punctes der Linie betrachtet, so sind dieselben veränderliche Größen und Functionen von einander (§. 84.).

§. 222.

Wenn man die Linien, wodurch eine Linie wie B D, ihre Lage gegen die Abscissen-Linie und den Anfangspunct nebst der Richtung der Coordinaten bestimmt wird, und auch die Coordinaten der Puncte selbst mit einerley Maße mißt, so werden diese Größen durch Zahlen ausgedrückt.

Diese Zahlen werden, jenachdem sie veränderlich oder beständig sind, d. h. jenachdem sie Größen ausdrücken, welche in Hinsicht auf verschiedene Puncte der Linie verschiedene Werthe erhalten, oder eben denselben Werth beybehalten, dem §. 85. gemäß bezeichnet.

Insbesondere ist es gewöhnlich, die Abscisse eines unbestimmten Punctes mit x, und dessen Ordinate mit y zu bezeichnen.

§. 223.

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Puncten vermittelst ihrer Coordinaten wurde bisher nur auf solche Puncte angewandt, welche zwischen den Schenkeln des Winkels X A Y (Fig. 1.) fallen; allein diese Bestimmungsart läßt sich auf alle Puncte ausdehnen, sie mögen in der Ebene der Linien X' X und Y' Y was immer für eine Lage haben.

Es fallen nämlich die Abscissen von solchen Puncten, welche auf derjenigen Seite der Ordinaten-Linie Y' Y liegen, auf welcher A X' liegt, in den Theil A X' der Abscissen-Linie, und die Ordinaten von Puncten auf derjenigen Seite der Abscissen-Linie X' X, auf welcher A Y' liegt, fallen auf eben dieselbe Seite

der Abscissen Linie. Für alle Puncte der Abscissen = Linie ist $y = o$, und für alle Puncte in der Ordinaten=Linie ist $x = o$; mithin ist für den Anfangspunct, $x = o$ und $y = o$.

Es bedarf kaum einer Erwähnung, daß diese Sätze umgekehrt auch richtig sind.

§. 224.

Durch die Größe der Coordinaten eines Punctes allein ist also der Ort desselben in einer Ebene noch nicht vollkommen bestimmt, wenn nicht zugleich die Lage der Coordinaten, wie in §. 223. angegeben ist; denn im Allgemeinen können vier Puncte gleiche Coordinaten haben.

Es ist nun zu zeigen, wie durch die Zahlen, welche die Größen der Coordinaten eines Punctes ausdrücken, auch die Lage dieser Coordinaten angegeben werden kann.

Ein Punct mag wo immer in der Ebene der Coordinaten=Linien $X'X$ und $Y'Y$ liegen, so läßt sich immer $A'X'' \# X'X$ und $A'Y'' \# Y'Y$ so ziehen, daß der Punct in den Winkel $X''A'Y''$ fällt.

Bezeichnet man die Coordinaten eines Punctes, auf die Coordinaten = Linien $X'X$ und $Y'Y$ bezogen, mit x und y, die Coordinaten eben desselben Punctes aber, auf $A'X''$ und $A'Y''$ als Coordinaten = Linien bezogen, mit x' und y'; so ist, wenn der Punct im Winkel XAY liegt, $x' = A'C + x$ und $y' = A'B + y$; liegt er zwischen den Parallelen $A'Y''$ und $Y'Y$, so ist $x' = A'C - x$, und wenn er zwischen den Parallelen $A'X''$ und $X'X$ liegt, $y' = A'B - y$.

Diese Sätze haben auch umgekehrt ihre Richtigkeit.

Sollen nun die Zahlen x und y zur Bezeichnung der Coordinaten auch außerhalb des Winkels XAY dienen, so müssen die Formeln: $x' = A'C + x$ und $y' = A'B + y$ allgemein, d. h. für alle Puncte in der Ebene der Coordinaten = Linien gültig seyn; mithin muß aus der Formel $x' = A'C + x$ für Puncte,

welche zwischen A′ Y″ und Y′ Y liegen, $x' = A'C - x$ werden, und die Formel $y' = A'B + y$ muß sich für Puncte, welche zwischen A′ X″ und X′ X liegen, in $y' = A'B - y$ verwandeln; also müssen die Abscissen auf A X′ negativ genommen werden, wenn sie auf A X positiv angenommen sind, und die Ordinaten auf derjenigen Seite der Abscissen = Linie X′ X, auf welcher A Y′ liegt, nach einer zu A Y′ parallelen Richtung gezogen, müssen als negative Größen betrachtet werden, wenn sie auf der andern Seite der Abscissen = Linie, auf welcher A Y liegt, positiv angenommen sind.

§. 225.

Eine Gleichung, welche angibt, wie sich die Coordinaten eines jeden Punctes einer Linie wechselseitig bestimmen, heißt eine Gleichung der Linie.

Die Gleichung einer Linie darf also außer den Coordinaten eines unbestimmten Punctes der Linie keine andern veränderlichen Größen enthalten.

§. 226.

Soll eine Gleichung einer Linie gefunden werden, für welche solche Bedingungen gegeben sind, die allen Puncten in ihr ausschließlich zukommen, und sie daher vollkommen bestimmen, so nehme man zuerst eine gerade Linie und einen Punct in ihr, in einer bestimmten Lage als Abscissen = Linie und als Anfangspunct, und nehme einen beliebigen Coordinaten-Winkel an (wenn dieses nicht schon vorgeschrieben ist); dann construire man diesen Voraussetzungen gemäß die Coordinaten eines willkürlichen Punctes der Linie; worauf man erst die verlangte Gleichung aus den gegebenen Bedingungen herleiten kann, welches aber nach der Verschiedenheit dieser Bedingungen immer ein besonderes Verfahren erfordert.

Fig. 3. Es sey z. B. B D eine Kreislinie und A ihr Mittelpunct; so ist es am einfachsten, die Abscissen = Linie X′ X durch

den Mittelpunct zu ziehen, diesen als Anfangspunct, und die Coordinaten rechtwinklig anzunehmen.

Zieht man nach dieser Voraussetzung aus einem beliebigen Puncte M der Kreislinie, MP senkrecht auf X'X, so sind AP = x und MP = y die Coordinaten dieses Punctes M.

Nun ist AM eine beständige Größe, und zwar für jeden Punct der Kreislinie ausschließlich; folglich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreyecke APM, wenn AM = a gesetzt wird, sogleich die verlangte Gleichung;

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

§. 227.

Nimmt man an, daß in einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Zahlen x und y durch die letztern die Größe von Coordinaten bey einem bestimmten Coordinaten-Winkel bezeichnet werde, so gehört die Gleichung für eine Linie, wenn für stetig auf einander folgende Werthe von x, die Veränderliche y immer mögliche Werthe hat; denn wenn (Fig. 1.) für x = AP, y = MP; für x = AP', y = M'P' wird, und für alle Werthe von x, welche > AP und < AP' sind, y immer möglich bleibt, so mag man durch was immer für einen Punct auf der Abscissen-Linie zwischen P und P' eine gerade Linie unter dem angenommenen Coordinaten-Winkel ziehen, so wird dieselbe durch einen Punct gehen, welcher dem durch die Gleichung festgesetzten Coordinaten-Verhältnisse entspricht. Folglich gibt es zwischen M und M' stetig fortlaufend solche Puncte, also eine Linie, welcher die Gleichung zugehört.

Gehören zu jedem Werthe von x mehrere Werthe von y, welches Statt hat, wenn y eine vielförmige Function von x ist (§. 89.), so gibt es mehrere Linien, deren Puncte eine solche Lage haben, daß zwischen den Coordinaten derselben das durch die Gleichung bestimmte Verhältniß Statt findet.

Diese Linien mögen nun zusammen treffen, so daß sie eine einzige ununterbrochene Linie bilden, odee nicht; so werden sie doch auch im letzten Falle als zusammmen gehörige Theile einer

Linie betrachtet, weil die Lage eines jeden Punctes in allen diesen Linien nach einem gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt ist.

§. 228.

Berechnet man aus der Gleichung einer Linie für verschiedene bestimmte Werthe der Abscisse die zugehörigen Werthe der Ordinate, so lassen sich eben so viele Puncte der Linie in ihrer gegenseitigen Lage zeichnen.

Man ziehe nämlich eine gerade Linie als Abscissen-Linie, und trage von einem in dieser Linie angenommenen Anfangspuncte aus die angenommenen Werthe der Abscisse nach demjenigen Maße auf, nach welchem die Größe der beständigen Linien der Gleichung bestimmt worden ist.

Durch die Endpuncte der Abscissen ziehe man Parallel-Linien unter dem Winkel mit der Abscissen-Linie, welcher als Coordinaten-Winkel vorausgesetzt ist, und schneide auf diesen Parallelen Stücke ab, welche die Größe der den Abscissen entsprechenden Ordinaten, nach eben demselben Längenmaße bestimmt, haben. Die Endpuncte dieser Stücke sind dann Puncte der Linie.

Bey diesem Auftragen der Coordinaten darf man nicht außer Acht lassen, nach Beschaffenheit ihres Zeichens (+ oder —) auf die Lage der Abscissen gegen den Anfangspunct, und der Ordinaten gegen die Abscissen-Linie Rücksicht zu nehmen (§. 224.).

§. 229.

Wenn es eine gerade Linie gibt, welche alle nach irgend einer Richtung gezogenen, unter sich parallelen Sehnen einer krummen Linie halbirt, so nennt man diese gerade Linie einen Durchmesser der krummen.

Die Durchschnittspuncte der krummen Linie mit einem Durchmesser heißen die Scheitel des Durchmessers, und die Theile der krummen Linie auf beyden Seiten eines Scheitels, die Schenkel oder Aeste der krummen Linie.

Hat eine krumme Linie zwey Durchmesser in einer solchen Lage, daß jeder derselben die Sehnen halbirt, welche zum andern parallel sind, so heißen sie conjugirte oder vereinigte Durchmesser, und der Winkel, welchen ihre Richtungen mit einander machen, heißt der Conjugations-Winkel.

Wenn ein Durchmesser auf den parallelen Sehnen, welche er halbirt, senkrecht ist, so heißt er eine Achse der krummen Linie.

Unter dem Mittelpuncte einer Linie versteht man einen Punct, welcher alle durch ihn gezogenen Sehnen der Linie halbirt.

§. 230.

Eine Abscissen-Linie ist ein Durchmesser, wenn zu jeder Abscisse gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören (§. 229.), und insbesondere eine Achse, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind.

§. 231.

Die gegenseitige Lage von Puncten in einer Ebene wird zuweilen auf folgende Weise bestimmt:

Fig. 1. Man zieht in der Ebene der Puncte M, M′... eine gerade Linie X′ X, und aus einem beliebigen Puncte A in ihr, die geraden Linien A M, A M′..., so ist die Lage eines jeden Punctes gegen X′ X und A durch die Länge der geraden Linie zwischen A und diesem Puncte, und durch den Winkel dieser Linie mit A X bestimmt.

Bey dieser Bestimmungsart heißen A M, A M′... die Ordinaten, auch die Vectoren (von Radius vector) der Puncte M, M′..., A heißt der Pol und die Winkel X A M, X A M′... nennt man die Abscissen-Winkel.

Wenn man den Anfangspunct A der Abscissen (§. 219.) als Pol annimmt, den Radius vector eines unbestimmten Punctes M mit z, den Abscissen-Winkel X A M mit φ, und den Coordinaten-Winkel (§. 219.) mit α bezeichnet, so ist im Drey-

ecke M A P der Winkel A P M $= 180° - \alpha$, folglich $y = \frac{z \sin. \varphi}{\sin. \alpha}$ und $x = \frac{z \sin. (\alpha - \varphi)}{\sin. \alpha}$.

Aus einer Gleichung einer Linie zwischen x und y (§. 225.) läßt sich also eine Gleichung derselben zwischen z und φ ableiten, welche man eine Polar-Gleichung der Linie nennt.

Umgekehrt kann aus einer Polar-Gleichung einer Linie eine Gleichung zwischen x und y, also für parallele Ordinaten gefunden werden, wenn man in der erstern für z und φ aus den beyden vorhergehenden Formeln substituirt.

In der Folge wird bloß von der Bestimmung der Lage von Puncten vermittelst paralleler Ordinaten gehandelt.

II. Abschnitt.

Von der Veränderung der Coordinaten, und der Eintheilung der Linien.

§. 232.

Offenbar wird die Gleichung einer Linie verändert, wenn man eine andere Abscissen-Linie annimmt, oder den Anfangspunct, oder den Coordinaten-Winkel verändert, also überhaupt die Gleichung auf ein anderes Coordinaten-System bezieht. So würde man z. B. für die Kreislinie eine andere Gleichung als $x^2 + y^2 = a^2$ (§. 226.) erhalten haben, wenn man den Anfangspunct in der Peripherie, oder einen schiefen Winkel als Coordinaten-Winkel angenommen hätte.

Durch die Beziehung einer Linie auf ein anderes Coordinaten-System kann die Gleichung derselben einfacher werden, oder auch eine solche Form erhalten, daß man dadurch zur Entdeckung neuer Eigenschaften der Linie gelangt; daher soll diese Verwandlung der Gleichungen auf eine allgemeine Art gezeigt werden.

§. 233.

Die gegebene Gleichung setze einen Coordinaten-Winkel $= \alpha$ voraus; im neuen Systeme sey aber derselbe $= \beta$, und x', y' seyen die Coordinaten eines Punctes, dessen Coordinaten im gegebenen Systeme x und y sind.

Fig. 4. Es sey A X die Linie der mit x bezeichneten Abscissen, A ihr Anfangspunct, und A′X′ die Abscissen-Linie des neuen Systemes mit dem Anfangspuncte A′. Durch A′ sey A′B unter dem Winkel $A'BX = \alpha$ an A X gezogen, $AB = a$, $A'B = b$, und der Winkel beyder Abscissen-Linien, $X'CX = \gamma$; so ist die Lage der beyden Coordinaten-Systeme durch a, b, α, β und γ bestimmt.

M sey ein beliebiger Punct der Linie, wofür die Gleichung zwischen x und y gegeben ist; aus diesem ziehe man MP ∥ A′B und MP′ an A′X′ unter dem Winkel $MP'X' = \beta$, so ist für den Punct M, $AP = x$, $MP = y$, $A'P' = x'$ und $MP' = y'$.

Es kömmt nun darauf an, x und y durch α, β, γ, a, b, x' und y' auszudrücken; denn hat man solche Ausdrücke für x und y, so gibt ihre Substitution in der gegebenen Gleichung eine andere, welche nur die Veränderlichen x' und y' enthält, und daher die verlangte ist.

Zu diesem Zwecke ziehe man durch A′ und P′ die Linien A′Q und P′R zu AX, P′S aber zu A′B parallel; so ist $P'A'S = \gamma$, $P'SQ = P'RQ = \alpha$, $A'P'S = \alpha - \gamma$, $MP'R = \beta + \gamma$, $P'MR = \alpha - (\beta + \gamma)$, und die Dreyecke A′S P′ und P′R M geben folgende Proportionen:

$$\sin A'SP' \text{ oder } \sin P'SQ : A'P' = \sin P'A'S : P'S = \sin A'P'S : A'S,$$

$\sin P'RM$ oder $\sin P'RQ : MP' = \sin MP'R : MR$
$= \sin P'MR : P'R;$

daher ist $P'S = \frac{x' \sin \gamma}{\sin \alpha}$, $A'S = \frac{x' \sin (\alpha - \gamma)}{\sin \alpha}$,

$MR = \frac{y' \sin (\beta + \gamma)}{\sin \alpha}$ und $P'R = \frac{y' \sin [\alpha - (\beta + \gamma)]}{\sin \alpha}$.

Nun findet sich AP der Summe der Linien $P'R$, $A'S$ und AB, MP aber der Summe der Linien MR, $P'S$ und $A'B$ gleich; also ist

$$x = \frac{y' \sin [\alpha - (\beta + \gamma)] + x' \sin (\alpha - \gamma)}{\sin \alpha} + a, \text{ und}$$

$$y = \frac{y' \sin (\beta + \gamma) + x' \sin \gamma}{\sin \alpha} + b.$$

Diese allgemeinen Formeln lassen sich leicht für besondere Fälle einrichten; so ist z. B. für die Verwandlung eines Systemes rechtwinkliger Coordinaten in ein anderes mit schiefwinkligen, wenn Abscissen-Linie und Anfangspunct beybehalten werden, $a = o$, $b = o$, $\alpha = 90°$ und $\gamma = o$, mithin

$x = x' + y' \cos \beta$ und $y = y' \sin \beta$.

§. 234.

Enthält ein Glied der zwischen x und y gegebenen Gleichung nur x^m oder y^m, und ist m eine ganze positive Zahl, so folgt aus der Form der für x und y gefundenen Werthe, daß die Gleichung zwischen x' und y' dieses Gliedes wegen, ebenfalls Glieder erhalten werde, welche x'^m und y'^m enthalten, daß aber kein Glied mit einer höhern Potenz, und auch kein Glied mit Potenzen von x' und y' vorkommen könne, in welchem die Summe der Exponenten $> m$ ist (§. 10. und 13.).

Eben so kann ein Glied mit dem Producte $x^m y^n$, wenn m und n ganze positive Zahlen sind, nur solche Glieder mit x' und y' geben, in welchen die höchsten Potenzen von x' oder y', wenn sie einzeln vorhanden sind, $m + n$ zum Exponenten haben, oder $m + n$ als Summe der Exponenten, wenn ein Glied Producte solcher Potenzen von x' und y' enthält.

§. 235.

Wenn in der Gleichung einer Linie, x und y algebraische Functionen (§. 88.) von einander sind, so heißt die Linie eine algebraische; sind sie aber transcendent, so heißt auch die Linie eine transcendente.

§. 236.

Reducirt man die Gleichung einer Linie, wenn sie algebraisch ist, eben so in Hinsicht auf beyde veränderlichen Größen x und y, wie nach §. 18. eine Gleichung in Hinsicht auf die unbekannte Größe reducirt wird, so erhält die Gleichung durch die Beziehung der Linie auf ein anderes Coordinaten-System als größte Summe der Exponenten von x' und y' in einem Gliede eben dieselbe Zahl, welche in der gegebenen Gleichung die größte Summe der Exponenten von x und y in einem Gliede bezeichnet (§. 234.).

Man theilt daher die algebraischen Linien nach dieser Summe, weil sie für jede Linie unveränderlich ist, in verschiedene Ordnungen ein, und sie heißen Linien der ersten, zweyten, . . . n^{ten} Ordnung, wenn die größte Summe der Exponenten von x und y in einem Gliede $= 1, 2 \ldots n$ ist.

Weil $x^m = x^m y^0$ und $y^n = x^0 y^n$ ist, so ist für die angeführte Summe bey Gliedern, welche nur x oder y allein enthalten, der Exponent der Potenz dieser Veränderlichen zu nehmen.

Die allgemeinste Gleichung für die Linien der ersten Ordnung ist also

$$Ay + Bx + C = 0,$$

für die Linien der zweyten Ordnung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \text{ u. s. w.}$$

Weil man aber den Ausdruck der Gleichung immer mit dem Coefficienten der höchsten Potenz von y dividiren kann, so lassen sich die Gleichungen für die algebraischen Linien immer auf folgende Form bringen:

$$y + Ax + B = 0,\ y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0 \text{ &c.}$$

wenn die höchste Potenz von y nicht fehlt.

§. 237.

Durch die Beziehung einer Linie auf ein anderes Coordinaten-System kann ihre Gleichung nicht algebraisch werden, wenn sie zuvor transcendent war; denn würde sie algebraisch, so bliebe sie durch die Zurückführung auf das vorige Coordinaten-System ebenfalls algebraisch (§. 236.).

§. 238.

Wenn in der Ebene einer algebraischen Linie der nten Ordnung eine gerade Linie in was immer für einer Lage gezogen wird, und man verändert die Gleichung der Linie so, daß sie sich auf diese gerade Linie als Abscissen-Linie bezieht, so bleibt sie noch von eben derselben Ordnung (§. 236.).

Setzt man dann $y = o$, so kömmt in der Gleichung nur noch x vor, und die Wurzeln der Gleichung, wenn man x als unbekannte Größe nimmt, sind alle diejenigen Werthe der Abscissen, deren Ordinaten Null sind. Allein der Endpunct einer jeden Ordinate ist auch ein Punct der Linie, wozu die Gleichung gehört; also geben die obigen Wurzeln diejenigen Abscissen, deren Endpuncte zugleich Punete der Linie sind.

Nun kann aber, weil die Gleichung von der nten Ordnung ist, in derselben höchstens x^n vorkommen; also kann eine Linie der nten Ordnung höchstens n Puncte mit einer geraden Linie gemein haben.

§. 239.

Eine Linie, welche von einer Geraden in unbestimmt vielen Puncten geschnitten werden kann, ist eine transcendente; denn wäre sie algebraisch, so gäbe es eine bestimmte Zahl von Durchschnittspuncten (§. 238.).

§. 240.

Jede Linie der ersten Ordnung ist eine gerade Linie; denn wäre sie krumm, so könnte sie mit einer geraden wenigstens zwey Puncte gemein haben.

Aus diesem folgt aber nicht, daß jede algebraische Gleichung höherer Ordnung zu einer krummen Linie gehöre; denn es könnte z. B. die Gleichung einer Linie der zweyten Ordnung (§. 236.) ein Product zweyer rationalen Factoren von der Form $y + ax + b$ und $y + \alpha x + \beta$ seyn, und dann wären für jeden Werth von x die beyden Wurzeln der Gleichung, $y = -ax - b$ und $y = -\alpha x - \beta$ (§. 39.); mithin wäre die Linie selbst ein System zweyer geraden Linien, deren Gleichungen $y + ax + b = o$ und $y + \alpha x + \beta = o$ sind.

§. 241.

Fig. 5. Wenn von der geraden Linie DE, deren Gleichung $y + Ax + B = o$ ist, die Abscissen-Linie AX in C und die Ordinaten-Linie AY in B geschnitten wird, so ist AC der Werth der Abscisse für $y = o$, und AB der Werth der Ordinate für $x = o$; bezeichnet man diese Werthe mit a und b, so ist also $a = -\frac{B}{A}$, und $b = -B$.

Bezeichnet ferner α den Coordinaten-Winkel, und δ den Winkel ECX der Linie DE mit der Abscissen-Linie, so findet man, weil sich im Dreyecke BCA, $AC : AB = \sin ABC : \sin BCA$ verhält, $\sin \delta = \frac{b}{a} \sin (\delta - \alpha) = A \sin (\delta - \alpha)$;

daraus folgt $\operatorname{tang} \delta = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha - 1}$.

§. 242.

Wenn für eine gerade Linie DE eine Gleichung gefunden werden soll, und außer dem Coordinaten-Winkel α zur Bestimmung ihrer Lage gegen die Abscissen-Linie, $AB = b$ und $ECX = \delta$ gegeben sind, so erhält man aus den vorhergehenden Gleichungen,

$A = \frac{\sin \delta}{\sin (\delta - \alpha)}$ und $B = -b$; also ist

$y + \frac{x \sin \delta}{\sin (\delta - \alpha)} - b = o$ die verlangte Gleichung.

Für rechtwinklige Coordinaten wird

$$\frac{\sin \delta}{\sin (\delta - \alpha)} = \frac{\sin \delta}{\sin (\delta - 90^\circ)} = \frac{\sin \delta}{-\cos \delta}$$

$= -\operatorname{tang} \delta$, also

$y - x \operatorname{tg} \delta - b = 0$.

§. 243.

Soll die Gleichung $y + Ax + B = 0$ zu einer geraden Linie gehören, die durch zwey Puncte geht, deren Abscissen a', a'' und deren Ordinaten b', b'' sind; so muß, wenn man $x = a'$ setzt, $y = b'$ seyn, und wenn $x = a''$ gesetzt wird, auch $y = b''$ seyn.

Daher bekömmt man $b' + A\,a' + B = 0$, und $b'' + A\,a'' + B = 0$, woraus man $A = \frac{b' - b''}{a'' - a'}$ und $B = \frac{a'\,b'' - a''\,b'}{a'' - a'}$ findet. Es ist also $y + \frac{b' - b''}{a'' - a'}\,x + \frac{a'\,b'' - a''\,b'}{a'' - a'} = 0$ die Gleichung dieser geraden Linie.

III. Abschnitt.

Von den Tangenten, und den Differentialen der Coordinaten und Bögen.

---

§. 244.

Fig. 6; 7. M sey ein willkürlicher Punct in einer krummen Linie B D, und M R eine gerade Linie durch M in einer bestimmten Lage gegen B D.

Man nehme auf B D einen andern Punct m beliebig, ziehe durch M und m die gerade Linie M m S, und betrachte den Ort des Punctes M nebst der Lage der Linie M R als unveränderlich, den Bogen M Q m aber als veränderlich; so ist auch der Winkel R M S veränderlich, und zwar so, daß sich dieser Winkel bey stetiger Veränderung des Bogens ebenfalls stetig verändert; denn bliebe der Winkel unverändert, während der Bogen z. B. um m Q abnimmt, so wäre m Q gerade, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 245.

Die Lage der geraden Linie M S wird durch die beyden Puncte M und m bestimmt; läßt man nun den Bogen M Q m bis Null abnehmen, so ist, wenn m auf M fällt, die Lage der Linie M S, und mithin auch die Größe des Winkels S M R unbestimmt.

Dieser Winkel ist also eine vom Bogen M Q m abhängende Größe, welcher kein bestimmter Werth zukömmt, wenn man M Q m = o setzt; also hat dieser Winkel eine Grenze (§. 113.); d. h. es gibt einen Winkel, welchem sich S M R, während man M Q m stetig abnehmen läßt, so nähert, daß der Unterschied dieser beyden Winkel kleiner werden kann, als jeder gegebene noch so kleine Winkel.

Nimmt man an, es sey Mt durch M so gezogen, daß t M R diese Grenze ist, so heißt Tt die Tangente des Punctes M der krummen Linie, und M der Berührungspunct.

Die durch den Berührungspunct auf der Tangente Senkrechte M N heißt die Normale des Punctes M.

§. 246.

Für jeden Punct M eines Theiles M D einer krummen Linie gibt es nur Eine Tangente; denn wäre Mt' ebenfalls eine Tangente durch M, so müßte t' M R zugleich mit t M R die Grenze des Winkels S M R seyn, welches unmöglich ist.

§. 247.

Zwischen der Tangente Mt und dem Bogen MD läßt sich keine gerade Linie ziehen; denn weil sich der Winkel SMR während der Abnahme des Bogens MQm stetig verändert, und der Unterschied tMR — SMR, nämlich der Winkel tMS kleiner werden kann, als jeder gegebene Winkel, so kömmt MS in die Lage einer jeden durch M an Mt beliebig nahe gezogenen geraden Linie, noch ehe MQm Null ist; folglich liegt immer noch ein Theil des Bogens MD zwischen einer solchen geraden Linie und der Tangente.

§. 248.

Für die krumme Linie BD sey X'X die Abscissen-Linie; A der Anfangspunct; AP = x und MP = y seyen die Coordinaten des Punctes M der Linie BD, und Tt die Tangente dieses Punctes.

Der Bogen BM verändere sich um das beliebige Stück MQm, und es seyen Ap und mp die Coordinaten des Punctes m; so ist, wenn MR # X'X ist, Pp = MR die Veränderung der Abscisse AP, und mR die Veränderung der Ordinate MP, welche mit der Veränderung MQm des Bogens BM zusammen gehören; folglich ist nach der gewöhnlichen Bezeichnung, Pp = MR = Δx und mR = Δy.

Wenn mp mit der Tangente Mt in t zusammen trifft, so ist tR eine Linie, deren Verhältniß zu mR oder Δy sich durch die Abnahme der Linie Pp dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nähern kann, weil durch diese Abnahme der Winkel mMR dem Winkel tMR beliebig nahe kommen kann (§. 245.), auch steht tR im geraden Verhältnisse mit MR oder Pp; also ist tR das Differentiale der Ordinate MP, wenn man Pp als Differentiale der Abscisse AP annimmt (§. 122.).

§. 249.

Je kleiner der Winkel tMm ist, desto weniger kann das Verhältniß der Linie Mt zum Bogen MQm, welcher zwischen

den Schenkeln dieses Winkels enthalten ist, vom Verhältnisse der Gleichheit unterschieden seyn. Nun kann aber der Winkel t M m durch die Abnahme des Bogens M Q m beliebig klein werden (§. 245.), also kann auch das Verhältniß der Linie M t zum Bogen M Q m, dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen; über dieß ist M t eben so wie t R im geraden Verhältnisse mit P p; also ist M t das Differentiale des Bogens B M, wenn man P p als das Differentiale der Abscisse betrachtet (§. 122.).

§. 250.

Aus dem Dreyecke M R t folgt

$$M\,t = \sqrt{MR^2 + tR^2 - 2\,MR\,.\,tR\,.\cos.\,MRt};$$

es ist aber, wenn man (von irgend einem Puncte B angefangen,) den Bogen B M = s, und P p = M R = d x setzt, M t = d s (§. 249.), t R = d y (§. 248.) und M R t das Supplement des Coordinaten-Winkels M P X = α; folglich

$$ds = (dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos.\,\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Bey rechtwinkligen Coordinaten ist $\cos.\,\alpha = \cos.\,90^\circ = 0$,

also $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$.

Daraus erhält man

$s = \int (dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos.\,\alpha)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 184.), und für rechtwinklige Coordinaten

$$s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

§. 251.

Betrachtet man eine Veränderung der Abscisse als Differentiale derselben, so ergibt sich aus den vorhergehenden Paragraphen leicht die Construction der zugehörigen Differentialen der Ordinate und des Bogens.

Wird aber eine gegebene Veränderung der Ordinate M P als Differentiale der Ordinate betrachtet, so mache man M G in der Richtung P M dieser Veränderung gleich, und ziehe durch

G eine Parallele zur Abscissen = Linie; dann ist der Theil G t dieser Parallelen, vom Puncte G bis zu ihrem Durchschnitte t mit der Tangente des Punctes M, dem zugehörigen Differentiale der Abscisse gleich, und der Theil M t der Tangente ist das zugehörige Differentiale des Bogens.

Wenn man hingegen M t auf der Tangente des Punctes M, einer gegebenen Veränderung des Bogens B M gleich macht, t p # M P und M R # P p zieht, so sind M R = P p und t R die Differentialen der Abscisse und der Ordinate, wenn man die gegebene Veränderung des Bogens als das Differentiale desselben annimmt.

§. 252.

Fig. 7. Es sey bey rechtwinkligen Coordinaten, φ die Größe des mit dem Halbmesser = 1 aus M beschriebenen Kreisbogens zwischen den Schenkeln des Winkels T M P, welchen die Ordinate mit der Tangente macht, oder es bezeichne φ auch die Größe dieses Winkels, so ist wegen T M P = M t R, tang. $\varphi = \frac{MR}{tR} = \frac{dx}{dy}$ (§. 248.).

Eben so ist bey rechtwinkligen Coordinaten die Tangente des Winkels, welchen die Tangente des Punctes M mit der Abscissen-Linie macht, oder die Tangente des zwischen den Schenkeln dieses Winkels beschriebenen Kreisbogens $= \frac{dy}{dx}$.

§. 253.

Fig. 6; 7. Wenn von der Größe der Tangente eines Punctes einer krummen Linie die Rede ist, so versteht man darunter den Theil M T derselben zwischen dem Berührungspuncte und der Abscissen = Linie; dasselbe gilt auch von der Größe der Normale.

Der Theil T P der Abscissen = Linie zwischen der Tangente und der Ordinate heißt die Subtangente, und der Theil P N der Abscissen = Linie zwischen der Normale und der Ordinate heißt die Subnormale des Punctes M.

§. 254.

Nimmt man die Coordinaten rechtwinklig, so ist im rechtwinkligen Dreyecke T M N (Fig. 7.)

$TP : MP : PN$, also $PN = \frac{MP^2}{TP}$; ferner ist

$TM = \sqrt{MP^2 + TP^2}$ und $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$;

d. h. $\text{Subnorm} = \frac{y^2}{\text{Subtang}}$, $\text{Tang} = \sqrt{y^2 + \text{Subt.}^2}$ und

$\text{Norm} = \sqrt{y^2 + \text{Subnorm}^2}$.

Da durch die Gleichung der krummen Linie, y als Function von x gegeben ist, so darf also nur Eine von den vier Linien: Subt., Subnorm, Tang und Norm als Function von x bekannt seyn, um auch die übrigen als Functionen von x ausdrücken zu können.

Es verhält sich aber in den ähnlichen Dreyecken M R t und T P M, $tR : MR = MP : TP$, nämlich $dy : dx = y : \text{Subt.}$, also ist $\text{Subt.} = \frac{y\,dx}{dy}$; folglich ist $\text{Subnorm} = y^2 : \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y\,dy}{dx}$,

$$\text{Tang} = (y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{dy}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ und}$$

$$\text{Norm} = (y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{dx}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}.$$

* §. 255.

Bey den schiefwinkligen Coordinaten $AP' = x'$ und $MP' = y'$ ist TP' die Subtangente, $P'N$ die Subnormale, TM die Tangente und MN die Normale des Punctes M. Ferner ist für den Coordinaten-Winkel $MP'X = \alpha$, $PP' = MP' \cos. MP'X = y' \cos. \alpha$, $y = y' \sin. \alpha$ und $x = x' + y' \cos. \alpha$ (§. 233.), woraus $dy = dy' \sin. \alpha$, $dx = dx' + dy' \cos. \alpha$, und

$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} =$

$(dx'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos. \alpha + dy'^2 \cos.^2 \alpha + dy'^2 \sin.^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} =$

$(dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos. \alpha)^{\frac{1}{2}}$ folgt.

Daher ist bey schiefwinkligen Coordinaten,

$$\text{Subt.} = TP' = TP - P'P = \frac{y\,dx}{dy} - P'P$$

$$= \frac{y' \sin.\alpha\,(dx' + dy' \cos.\alpha)}{dy' \sin.\alpha} - y' \cos.\alpha = \frac{y'\,dx'}{dy'};$$

$$\text{Subnorm} = P'N = PN + P'P = \frac{y\,dy}{dx} + P'P$$

$$= \frac{y' \sin.\alpha \,.\, dy' \sin.\alpha}{dx' + dy' \cos.\alpha} + y' \cos.\alpha$$

$$= \frac{y'\,dy' \sin.^2\alpha + y'\,dx' \cos.\alpha + y'\,dy' \cos.^2\alpha}{dx' + dy' \cos.\alpha}$$

$$= \frac{y'\,(dy' + dx' \cos.\alpha)}{dx' + dy' \cos.\alpha};$$

$$\text{Tang} = TM = \frac{y}{dy}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y' \sin.\alpha}{dy' \sin.\alpha}(dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos.\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{y'}{dy'}(dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos.\alpha)^{\frac{1}{2}}, \text{ und}$$

$$\text{Norm.} = MN = \frac{y}{dx}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{y' \sin.\alpha\,(dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos.\alpha)^{\frac{1}{2}}}{dx' + dy' \cos.\alpha}.$$

§. 256.

Wenn die Gleichung einer krummen Linie gegeben ist, so läßt sich das Differentiale der Ordinate durch das der Abscisse ausdrücken, und der erhaltene Werth in den Ausdrücken, welche in den vorhergehenden Paragraphen für Subt., Subnorm, Tang und Norm gefunden wurden, substituiren. Man bekömmt dann die Größe dieser Linien für jeden Punct als Function seiner Coordinaten, oder auch seiner Abscisse allein ausgedrückt.

Bey der Ableitung der Formeln wurde angenommen, daß bey positiver Abscisse der Durchschnitt T der Tangente mit der Abscissen-Linie auf derjenigen Seite der Ordinate liege, auf

welcher sich der Anfangspunct A befindet, und daß beym Durchschnitte N der Normale die entgegengesetzte Lage Statt habe; durch die Erinnerung an diese Voraussetzung wird man also immer im Stande seyn, zu beurtheilen, auf welche Seite von MP, T oder N falle, wenn die Subtangente oder die Subnormale einen negativen Werth erhalten sollte. Z. B. aus der Gleichung für die Kreislinie, $x^2 + y^2 = a^2$ (§. 226.) ist $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ (§. 139.); mithin $dy = -\frac{x\,dx}{y}$, und $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ $= (dx^2 + \frac{x^2\,dx^2}{y^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{y}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\,dx}{y}$; folglich, da die Coordinaten rechtwinklig angenommen wurden, (§. 254.) Subt. $= y\,dx : -\frac{x\,dx}{y} = -\frac{y^2}{x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$, Tang. $= (y : -\frac{x\,dx}{y}) \cdot \frac{a\,dx}{y} = -\frac{y^2}{x\,dx} \cdot \frac{a\,dx}{y} = -\frac{ay}{x} = -\frac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$,

Subnorm $= y \cdot -\frac{x\,dx}{y} : dx = -x$, und Norm $= \frac{y}{dx} \cdot \frac{a\,dx}{y} = a$.

Fig. 3. Die Tangente des Punctes M schneidet also den als Abscissen-Linie angenommenen Durchmesser X′X in dem Abstande $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ von der Ordinate, und der Durchschnitt T liegt auf derjenigen Seite der Ordinate, auf welcher sich der Anfangspunct A nicht befindet, die Normale hingegen geht durch den Anfangspunct; also ist beym Kreise die Tangente auf dem Radius des Berührungspunctes senkrecht.

§. 257.

Durch die Subtangente ist der Ort eines Punctes der Tangente, außer dem Berührungspuncte gegeben; also kann man durch jeden Punct einer krummen Linie, dessen Subtangente gegeben ist, die Tangente ziehen. Dieses kann auch geschehen,

wenn die Subnormale gegeben ist, weil man dadurch die Lage der Normale erhält, auf welcher die Tangente senkrecht ist.

§. 258.

Das Verfahren, die Gleichung einer Linie zu finden, für welche eine von den Linien: Subt., Subnorm, Tang. und Norm als Function der Coordinaten gegeben ist, heißt die umgekehrte Methode der Tangenten.

Es sey z. B. für eine Linie bey rechtwinkligen Coordinaten, Tang. $= \frac{(a+x)\,y}{x}$, so ist $\frac{(a+x)\,y}{x} = \frac{y}{dy}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 254.), woraus

$$dy = \pm x\,dx\,(a^2+2ax)^{-\frac{1}{2}}$$ und mithin

$$y = \pm\int x\,dx\,(a^2+2ax)^{-\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$ folgt.

Nun findet man nach §. 199.

$$\int x\,dx\,(a^2+2ax)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3a}(x-a)\sqrt{a^2+2ax},$$ also ist

$$y = \pm\frac{1}{3a}(x-a)\sqrt{a^2+2ax} + \text{Const.}$$ die gesuchte Gleichung, in welcher sich Const. bestimmen läßt, wenn für einen Werth von x auch y bekannt ist (§. 185.).

Es sey ferner für eine Linie die Subtangente eine beständige Linie a, so hat man (die Coordinaten mögen recht- oder schiefwinklig seyn,) $\frac{y\,dx}{dy} = a$ (§. 254. und 255.); mithin

$$dx = \frac{a\,dy}{y} + \text{und } x = a\,L\,y + \text{Const.}$$

Anmerkung.

Die umgekehrte Methode der Tangenten setzt meistens eine weitere Ausführung der Integral-Rechnung voraus, als der Zweck dieser Anfangsgründe gestattete.

IV. Abschnitt.

Von den Wendungspuncten.

* §. 259.

Fig. 8. In der Ebene einer krummen Linie BCD sey eine Gerade EF gezogen; MT sey die Tangente durch den Endpunct M des Bogens BM, und durch irgend einen Punct A der Linie EF sey At # MT; so sind die Nebenwinkel der Linie At mit EF den Nebenwinkeln der Tangente MT mit EF wechselseitig gleich.

Der Bogen BM nehme stetig zu, und dabey verändere sich die Richtung der Tangente seines Endpunctes M so, daß EAt, bey vorausgesetzter beständig paralleler Lage von At und MT, ebenfalls stetig zunimmt, bis M in C fällt; bey der fernern Zunahme des Bogens BM werde aber EAt wieder kleiner.

Der Bogen BC hat nach dieser Voraussetzung eine solche Beschaffenheit, daß die Richtung der Tangente eines jeden Punctes in ihm von der Richtung der Tangente eines vorhergehenden nach einerley Seite zu abweicht, und daß die beyden von den Berührungspuncten ausgehenden Theile der Tangenten und die Durchschnittspuncte der letztern mit einander, an einerley Seite von BC liegen.

Beym Bogen CD hat das Nämliche Statt, nur an der entgegen gesetzten Seite; es muß daher die Linie BCD von CS, der Tangente des Punctes C, in C geschnitten werden.

Der Bogen BC heißt nun an derjenigen Seite erhaben, an welcher die Tangenten seiner Puncte liegen, und an der entgegen gesetzten Seite hohl. Der Bogen CD ist also an derjenigen Seite hohl, an welcher BC erhaben ist.

Der Verbindungspunct C zweyer Bögen, welche an entgegen gesetzten Seiten hohl sind, heißt ein **Wendungspunct** der krummen Linie.

Für den Wendungspunct C hat also E A t einen größten Werth (§. 165.); folglich ist, da man E F immer in der Richtung einer gegebenen Abscissen-Linie ziehen kann, der eine von den beyden Nebenwinkeln, welche die Tangente eines Wendungspunctes mit der Abscissen-Linie macht, ein Größtes und der andere ein Kleinstes.

* §. 260.

Fig. 6. Aus dem Dreyecke M R t ist

$$\text{tang } tMR = \frac{tR \sin MRt}{MR - tR \cos MRt};$$ also, weil M R ∥ X' X ist,

$$\text{tang } MTP = \frac{dy \sin \alpha}{dx + dy \cos \alpha}$$ für den Coordinaten-Winkel M P X $= \alpha$. Nun geben aber äußerste Werthe von tang M T P auch äußerste Werthe von M T P; also muß für die äußersten Werthe von M T P, mithin für die Wendungspuncte, x solche Werthe haben, daß dadurch $d\frac{dy \sin \alpha}{dx + dy \cos \alpha} : dx = o$ wird (§. 173.).

Man findet, d x als beständig angenommen, $d\frac{dy \sin \alpha}{dx + dy \cos \alpha}$:

$$dx = \frac{d^2 y \sin \alpha}{(dx + dy \cos \alpha)^2}$$ (§. 145.), welche Größe für jeden Werth von d x nicht Null werden kann, wenn nicht $d^2 y = o$ ist. Die Gleichung $d^2 y = o$ enthält also alle jene Werthe von x, welchen ein Wendungspunct zugehören kann.

Ob aber alle durch die Gleichung $d^2 y = o$ bestimmten Werthe von x, oder welche aus ihnen äußerste Werthe von tang M T P geben, und mithin zu Wendungspuncten gehören, hängt von den Werthen ab, welche $d^2\left(\frac{dy \sin \alpha}{dx + dy \cos \alpha}\right) : dx^2$ durch diese Werthe von x erhält. Man findet $d^2\left(\frac{dy \sin \alpha}{dx + dy \cos \alpha}\right) : dx^2$

$$= \frac{d^3 y \sin \alpha}{dx(dx + dy \cos \alpha)^2} - \frac{(d^2 y)^2 \sin 2\alpha}{dx(dx + dy \cos \alpha)^3};$$ also ist für jene Werthe von x, wodurch $d^2 y = o$ wird,

$d^2\left(\frac{dy \sin\alpha}{dx + dy\cos\alpha}\right) : dx^2 = \frac{d^3y \sin\alpha}{dx(dx + dy\cos\alpha)^2}$, welche Größe nur dann $= o$ werden kann, wenn $d^3y = o$ wird.

Solche Werthe von x, welche d^2y auf Null bringen, d^3y aber nicht, gehören also zu äußersten Werthen von tang MTP (§. 171), folglich auch zu Wendungspuncten.

Sollte durch Werthe von x, wodurch $d^2y = o$ wird, auch $d^3y = o$ werden, so kann die Untersuchung nach §. 171. fortgesetzt werden.

* §. 261.

Aus der Gleichung für den Kreis (§. 226.) ist $y = \pm (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, mithin $dy = \mp x\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $d^2y = \mp dx^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \mp x^2 dx^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} = \mp \frac{a^2 dx^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Für die Wendungspuncte der Kreislinie muß also $\mp \frac{a^2 dx^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = o$ seyn; da es aber keinen Werth von x gibt, wodurch $\mp \frac{a^2 dx^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = o$ wird, so folgt, daß die Kreislinie keinen Wendungspunct habe.

Es sey $y = x + \frac{b}{a^3}x^3 - \frac{x^4}{a^3}$ die Gleichung einer Linie, so ist $dy = (1 + \frac{3b}{a^3}x^2 - \frac{4x^3}{a^3})\,dx$, $d^2y = \frac{6(bx - 2x^2)\,dx^2}{a^3}$ und $d^3y = \frac{6(b - 4x)\,dx^3}{a^3}$.

Die Annahme: $d^2y = o$ gibt $bx - 2x^2 = o$, also $x = o$ oder $x = \frac{1}{2}b$; für $x = o$ wird $d^3y = \frac{6b\,dx^3}{a^3}$, und für $x = \frac{1}{2}b$, $d^3y = -\frac{6b\,dx^3}{a^3}$.

Beyde Werthe von x gehören also zu Wendungspuncten;

der erste ist der Anfangspunct der Abscissen selbst, und den Ort des zweyten erhält man, wenn man $x = \frac{1}{2} b$ und $y = \frac{1}{2} b + \frac{b^4}{16 \cdot a^3}$ macht, weil für $x = o$ auch $y = o$, und für $x = \frac{1}{2} b$, $y = \frac{1}{2} b + \frac{b^4}{16 \cdot a^3}$ wird.

V. Abschnitt.

Vom Krümmungskreise.

* §. 262.

Fig. 9. Obwohl keine gerade Linie zwischen dem Bogen M D einer krummen Linie und der Tangente M t des Punctes M, durch M möglich ist (§. 247.), so könnte es doch eine Kreislinie M E durch M geben, deren dem Puncte M zunächst liegende Theile zwischen M t und M D fallen.

Offenbar muß der Mittelpunct eines solchen Kreises an der hohlen Seite der Linie M D liegen; allein, da der Winkel, welchen die Sehne eines beliebigen Bogens M m der Linie M D mit der Tangente M t macht, beliebig klein werden kann, wenn man den Bogen M m bis auf Null abnehmen läßt (§. 245.), so muß auch der Winkel der Sehne eines beliebigen Bogens M m' vom Kreise mit M t beliebig klein werden können; also muß M t auch die Tangente des Punctes M der Kreislinie seyn, und daher der Mittelpunct C in der Normale M N des Punctes M der krummen Linie M D liegen.

* §. 263.

Auf der Abscissen-Linie X' X sey für eine gemeinschaftliche Abscisse x vom Anfangspuncte A aus, die senkrechte Ordinate eines Punctes der Linie B D, = y, und die senkrechte Ordinate eines Punctes in der Kreislinie M E, = w. Für jenen Werth

AP von x, welcher dem gemeinschaftlichen Puncte M zugehört, ist also $y = w$, und TP die gemeinschaftliche Subtangente (§. 262.), folglich $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{w\,dx}{dw}$ (§. 254.); daher $dw = dy$.

Wenn man annimmt, daß x die Abscisse AP des gemeinschaftlichen Punctes M, u eine beliebige Veränderung Pp derselben bezeichne, und daß mp und m'p die Ordinaten der Puncte m und m' seyen, wozu die gemeinschaftliche Abscisse $Ap = x + u$ gehört, so ist (§. 149.)

$$mp = y + \frac{u}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{u^2}{1\,2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \text{ und}$$

$$m'p = w + \frac{u}{1}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3w}{dx^3} + \ldots;\ \text{mithin}$$

wegen $w = y$ und $dw = dy$,

$$m'p - mp = \frac{u^2}{1.2}\left(\frac{d^2w - d^2y}{dx^2}\right) + \frac{u^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3w - d^3y}{dx^3}\right) + \ldots,$$

und es gibt immer einen Werth von u, wodurch

$$\frac{u^2}{1.2}\left(\frac{d^2w - d^2y}{dx^2}\right) > \frac{u^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3w - d^3y}{dx^3}\right) + \ldots \text{ wird}$$

(§. 97.).

Bestimmt man nun den Radius MC so, daß $d^2w - d^2y$ für denjenigen Werth von x, welcher dem gemeinschaftlichen Puncte M zugehört, positiv wird, wenn MD gegen die Abscissen-Linie hohl ist, so wird bey dem angeführten Werthe von u und bey jedem kleinern auch $m'p - mp$ positiv; dann fällt also der von M ausgehende Theil ME der Kreislinie zwischen MD und die Tangente.

Würde man aber den Radius so bestimmen, daß bey den angegebenen Umständen $d^2w - d^2y$ negativ würde, so müßte MD zwischen ME und die Tangente fallen.

Macht man eben dieselben Schlüsse für den Fall, wenn MD gegen die Abscissen-Linie erhaben ist, so findet man, daß bey negativem Werthe von $d^2w - d^2y$ der Kreisbogen zwischen MD und der Tangente, bey positivem Werthe von $d^2w - d^2y$ hin-

gegen M D zwischen dem Kreisbogen und der Tangente liegen werde.

* §. 264.

Da eine Kreislinie überall gleich gekrümmt, und bey Kreisen von verschiedenen Radien die Krümmung desto größer ist, je kleiner der Radius ist, so kann man die Krümmung einer Linie an verschiedenen Stellen mit der Krümmung einer Kreislinie vergleichen.

Offenbar ist eine Kreislinie, deren Mittelpunct in der Normale liegt, weniger gekrümmt, als die krumme Linie M D bey M, wenn der durch M gehende Kreisbogen zwischen M D und der Tangente liegt; mehr hingegen, wenn M D zwischen der Kreislinie und der Tangente liegt.

Sind also die Radien zweyer Kreise so bestimmt, daß für den einen $d^2 w - d^2 y$ positiv, und für den andern negativ wird, wenn für x der Werth der Abscisse des gemeinschaftlichen Punctes M gesetzt wird; so ist die eine Kreislinie mehr, und die andere weniger gekrümmt, als die krumme Linie M D bey M.

Es ist also die Krümmung derjenigen Kreislinie am wenigsten von der Krümmung der Linie M D bey M unterschieden, deren Radius so bestimmt ist, daß $d^2 w - d^2 y = 0$, also $d^2 w = d^2 y$ wird.

Man nennt einen solchen Kreis den Krümmungskreis und seinen Radius den Krümmungshalbmesser.

* §. 265.

A H = f und C H = g seyen die Coordinaten des Mittelpunctes C; der Radius M C sey = ϱ und C G # H P, so ist G C = A H — A P = f — x, $M G = \sqrt{M C^2 - G C^2} = \sqrt{\varrho^2 - (f-x)^2}$, und M P = H C + M G; also ist $w = g + \sqrt{\varrho^2 - (f-x)^2}$; die Gleichung des Kreises auf die Abscissen-Linie X′ X und den Anfangspunct A bezogen. Daraus folgt

$d w = (f - x)\, d x\, [\varrho^2 - (f-x)^2]^{-\frac{1}{2}}$ und $d^2 w = -\varrho^2 d x^2 . [\varrho^2 - (f-x)^2]^{-\frac{3}{2}}$.

Bezeichnet nun ϱ den Krümmungshalbmesser, und x die Abscisse des gemeinschaftlichen Punctes, so ist $w = y$, $d w = d y$ (§. 263.) und $d^2 w = d^2 y$ (§. 264.); man hat daher die Gleichungen:

$$y = g + [\varrho^2 - (f-x)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$d y = (f-x)\, d x\, [\varrho^2 - (f-x)^2]^{-\frac{1}{2}}$ und

$d^2 y = -\varrho^2 d x^2 [\varrho^2 - (f-x)^2]^{-\frac{3}{2}}$, wodurch also ϱ nebst den Coordinaten f und g des Mittelpunctes bestimmt ist.

Aus der ersten Gleichung ist $\varrho = [(f-x)^2 + (y-g)^2]^{\frac{1}{2}}$; um nun f und g wegzuschaffen, verfährt man am kürzesten auf folgende Art:

Die erste Gleichung gibt $[\varrho^2 - (f-x)^2]^{\frac{1}{2}} = y - g$, also verwandeln sich die zweyte und dritte in

$$d y = \frac{(f-x)\, d x}{y-g} \text{ und } d^2 y = -\frac{\varrho^2 d x^2}{(y-g)^3}.$$

Aus der vorhergehenden von diesen beyden wird $f - x = \frac{(y-g)\, d y}{d x}$, mithin

$$\varrho = [(y-g)^2 . \frac{d y^2}{d x^2} + (y-g)^2]^{\frac{1}{2}} = (y-g) \frac{(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}}}{d x}.$$

Ferner gibt die Gleichung: $d^2 y = -\frac{\varrho^2 d x^2}{(y-g)^3}$,

$$y - g = \left(-\frac{\varrho^2 d x^2}{d^2 y}\right)^{\frac{1}{3}};$$ daher erhält man

$$\varrho = \left(-\frac{\varrho^2 d x^2}{d^2 y}\right)^{\frac{1}{3}} . \frac{(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}}}{d x}, \quad \varrho^3 = -\frac{\varrho^2 d x^2}{d^2 y} . \frac{(d x^2 + d y^2)^{\frac{3}{2}}}{d x^3},$$

$$\text{also } \varrho = -\frac{(d x^2 + d y^2)^{\frac{3}{2}}}{d x\, d^2 y}.$$

* §. 266.

Sind x′ und y′ schiefwinklige Coordinaten des Punctes M der krummen Linie M D, und der Coordinaten-Winkel $= \alpha$, so

ist $x = x' + y' \cos \alpha$, $y = y' \sin \alpha$, $dx = dx' + dy' \cos \alpha$, $dy = dy' \sin \alpha$, $d^2 y = d^2 y' \sin \alpha$, und $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = (dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}$ (§. 255.); folglich ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{(dx'^2 + dy'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(dx' + dy' \cos \alpha)\, d^2 y' \sin \alpha}.$$

* §. 267.

Wenn die Gleichung einer krummen Linie gegeben ist, so läßt sich das erste und das zweyte Differentiale der Ordinate durch jenes der Abscisse ausdrücken, folglich der Krümmungshalbmesser als Function der Abscisse angeben.

* §. 268.

Bey der Ableitung der Formel für den Krümmungshalbmesser wurde dieser positiv angenommen, wenn der Mittelpunct C und der Durchschnitt N der Normale mit der Abscissen-Linie auf eben derselben Seite des Berührungspunctes M liegen; wenn also ϱ einen negativen Werth erhält, so zeigt dieses an, daß C und N auf verschiedenen Seiten von M liegen, und daß also die krumme Linie bey M gegen die Abscissen-Linie erhaben sey.

* §. 269.

Wenn M ein Wendungspunct ist, so ist $d^2 y = 0$ (§. 260.), folglich $\frac{1}{\varrho} = 0$; d. h. wie groß man immer den Radius nehmen mag, so hat die Kreislinie doch immer eine stärkere Krümmung, als die krumme Linie beym Wendungspuncte.

VI. Abschnitt.

Von der Evolute.

*§. 270.

Fig. 9. Wenn sich die Stelle des Punctes M in der Linie BMD verändert, so verändert sich auch, wenn BMD nicht selbst eine Kreislinie ist, die Stelle des Mittelpunctes C des Krümmungskreises.

Da nun für jeden Punct M einer krummen Linie BMD der Ort des Mittelpunctes C bestimmt ist, so gibt es eine durch BMD bestimmte Linie bCd, in welcher die Mittelpuncte aller Krümmungskreise liegen, die zu Puncten der Linie BMD gehören. Die Coordinaten f und g (§. 265.) des Punctes C der Linie bCd, welcher mit einem Puncte M der Linie BMD zusammen gehört, sind also Functionen von x, und daher veränderlich.

*§. 271.

Aus der Gleichung $\varrho = \frac{(y-g)(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$ (§. 265.) findet man, wenn $= \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$ für ϱ gesetzt wird, $g = y + \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, und dann durch die Substitution dieses Werthes von g in der Gleichung $f-x = (y-g)\frac{dy}{dx}$ (§. 265.), $f = x - \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Da sich aus der gegebenen Gleichung einer Linie zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, sowohl y, als auch dy

und $d^2 y$ als Functionen von x und dx angeben lassen, so hat man zwey Gleichungen zwischen f, g und x, aus welchen durch Wegschaffung von x eine dritte gebildet werden kann, die nur die Veränderlichen f und g enthält.

Man kann daher aus der Gleichung einer Linie B M D eine Gleichung für die Linie b C d finden, in welcher die Mittelpuncte aller Krümmungskreise liegen, die zu Puncten der Linie B M D gehören.

* §. 272.

Aus den vorhergehenden Werthen von f und g folgt, dx als beständig angenommen,

$$dg = 3\,dy - \frac{(dx^2 + dy^2)\,d^3y}{(d^2y)^2} \text{ und}$$

$$df = -\left[3\,dy - \frac{(dx^2+dy^2)\,d^3y}{(d^2y)^2}\right]\cdot\frac{dy}{dx}; \text{ mithin ist}$$

$$\frac{df}{dg} = -\frac{dy}{dx}.$$

Weil aber $f - x = (y - g)\frac{dy}{dx}$ (§. 265.) und daher

$f + \frac{g\,dy}{dx} = x + \frac{y\,dy}{dx}$ ist, so ist also auch

$f - \frac{g\,df}{dg} = x + \frac{y\,dy}{dg}$, nämlich

$\frac{g\,df}{dg} = f - x - \frac{y\,dy}{dx} =$ A H — A P — P N (§. 254.)

$= -$ H N.

Nun drückt $\frac{g\,df}{dg}$ die Subtangente des Punctes C der Linie b C d der Größe und Lage nach aus (§. 254. u. 256.); also ist N der Durchschnitt der Tangente des Punctes C mit der Abscissen-Linie.

Der Krümmungshalbmesser M C eines jeden Punctes M der Linie B M D liegt daher immer in der Richtung der Tangente des zugehörigen Punctes C der Linie b C d.

* §. 273.

Aus den Werthen von d f und d g (§. 272.) folgt auch $df^2 + dg^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}[3dy - \frac{(dx^2+dy^2)d^3y}{(d^2y)^2}]^2$, und man findet eben denselben Werth für $d\varrho^2$, wenn man $\varrho = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$ bey beständigem d x differentiirt (§. 145.).

Es ist also $\pm(df^2+dg^2)^{\frac{1}{2}} = d\varrho$, und mithin $\varrho = \text{Const} \pm \int(df^2+dg^2)^{\frac{1}{2}}$.

In dieser Formel ist $\int(df^2+dg^2)^{\frac{1}{2}}$ die Länge des Bogens der Linie b C d von irgend einem Puncte b angefangen bis zum Puncte C, dessen Coordinaten f und g sind (§. 250.). Also ist $MC \mp bC$ eine beständige Größe, und deßwegen (Fig. 9. u. 10.) $M'C' \mp bC' = MC \mp bC$, wenn M' ein anderer Punct der Linie BD, und M'C' dessen Krümmungshalbmesser ist. Daraus folgt $M'C' = MC \pm bC' \mp bC = MC \pm (bC' - bC) = MC \pm CC'$, nämlich $M'C' = MC + CC'$ (Fig. 9.), oder $M'C' = MC - CC'$ (Fig. 10.); der Unterschied der Krümmungshalbmesser zweyer Puncte M und M' der Linie B D ist daher dem zwischen ihren Mittelpuncten enthaltenen Bogen C C' der Linie b C d gleich.

* §. 274.

Man stelle sich vor, daß um einen Theil der Linie b C d ein biegsamer Faden d C K (Fig. 9.) oder b C K (Fig. 10.) gelegt, in d (Fig. 9.) oder b (Fig. 10.) befestiget, und von C aus, wo derselbe die Linie b C d verläßt, gerade ausgespannt sey; so ist C K die Richtung der Tangente des Punctes C, und folglich M C die Größe und Richtung des Krümmungshalbmessers des Punctes M, in welchem die Linie B M D von C K geschnitten wird (§. 272.).

Wickelt man den Faden von der Linie b C d allmählig bis C' (Fig. 9.) ab, oder auf dieselbe (Fig. 10.) auf, so vergrößert oder verkleinert sich dadurch die Länge des Stückes M C um die

Länge des abgewickelten oder aufgewickelten Bogens, und bleibt immer in der Richtung der Tangente M'C' des Punctes, in welchem der Faden die Linie b C d verläßt, und folglich in der Richtung des Krümmungshalbmessers desjenigen Punctes M' in welchem nunmehr B M D vom Faden geschnitten wird.

Allein da $M'C' = MC + CC'$ (Fig. 9.) oder $M'C' = MC - CC'$ (Fig. 10.) ist, so folgt, daß derjenige Punct des Fadens, welcher anfangs auf M fiel, auch mit M' zusammen fallen, und also bey der Ab- oder Aufwicklung die Linie B M D beschreiben müsse.

Man nennt deßhalb b C d die abgewickelte Linie, oder die Evolute von B M D.

VII. Abschnitt.

Von der Rectification krummer Linien ꝛc.

§. 275.

Die Größe einer krummen Linie, einer Fläche oder eines Körpers in einem bekannten Längen- Flächen- oder Körper-Maße angeben, heißt die Linie rectificiren, die Fläche quadriren, den Körper cubiren.

§. 276.

Fig. 6. Für den Bogen $BM = s$ hat man, wenn x und y die Coordinaten seines Endpunctes M bezeichnen,

$$s = \int (dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} + \text{Const}\ (\S.\ 250.).$$

Das Integrale läßt sich aber erst finden, wenn y als Function von x, folglich, wenn eine Gleichung der Linie gegeben ist; dann läßt sich nämlich d y durch d x ausdrücken, und der gefundene Werth in der vorhergehenden Formel substituiren.

Da $s = o$ seyn muß, wenn $x = AE =$ der Abscisse des Anfangspunctes B des Bogens ist, so läßt sich Const. immer bestimmen (§. 185.).

Z. B. für den Kreis ist $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 226.), und wegen der rechtwinkligen Coordinaten,

$s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$; also $dy = -x\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$,
$dx^2 + dy^2 = dx^2 + x^2\,dx^2\,(a^2 - x^2)^{-1} = a\ dx^2\,(a^2 - x^2)^{-1}$
und daher

$$\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = a \int dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist $dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ein binomisches Differentiale von der Form $x^m dx\,(\alpha + \beta x^n)^p$, und dabey $m = o$, $n = 2$, folglich $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$; es ließe sich daher nach §. 201. II. integriren, wenn das veränderliche Glied positiv wäre; allein da das Gegentheil Statt hat, so kann die Integrirung nur nach §. 196. geschehen.

Man findet (§. 12.)

$$(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} + \frac{x^2}{2a^3} + \frac{3x^4}{2.4a^5} + \frac{3.5x^6}{2.4.6.a} + \ldots,$$

also ist $\int dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$\int\left(\frac{dx}{a} + \frac{x^2\,dx}{2a^3} + \frac{3x^4\,dx}{2.4.a^5} + \frac{3.5x^6\,dx}{2.4.6a^7} + \ldots\right)$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{x^3}{2.3a^3} + \frac{3x^5}{2.4.5a^5} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7a^7} + \ldots;$$

mithin

$$s = x + \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{3x^5}{2.4.5a^4} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7a^6} + \ldots + \text{Const.}$$

Nimmt man denjenigen Punct des Kreisbogens, dessen Ordinate durch den Mittelpunct geht, als Anfangspunct des Bogens, so ist für $x = o$ auch $s = o$; man hat also Const. $= o$.

Ein Kreisbogen läßt sich daher nur näherungsweise rectificiren.

Für $x = \frac{1}{2}a$ enthält der Bogen s, 30 Grade, und ist mithin dem zwölften Theile der Peripherie gleich; folglich ist die Länge

der Peripherie $= 12\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2.3a^2} \cdot \frac{a^3}{2^3} + \frac{3}{2.4.5a^4} \cdot \frac{a^5}{2^5} + \ldots\right)$

$= 12\,a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right)$

$= 12\,a \times 0{,}52359877\ldots$

Wenn man, wie gewöhnlich, die Verhältnißzahl des Durchmessers zur Peripherie mit π bezeichnet, so hat man

$2a : 12a \times 0{,}52359877 = 1 : \pi$, und daher

$\pi = 6 \times 0{,}52359877 = 3{,}1415926\ldots$

§. 277.

Fig. 6. Die Ordinaten B E und M P der Endpuncte des Bogens B M begrenzen nebst diesem Bogen und dem Theile E P der Abscissen-Linie die Fläche B E P M $=$ V, welche um P M Q m p $= \Delta$ V zunimmt, wenn A P $= x$ um P p $= \Delta x$ wächst.

Wenn man m r $\#$ X′ X zieht, so entsteht dadurch das Parallelogramm P m, welches mit dem Parallelogramme P R einerley Grundlinie P p hat; diese Parallelogramme verhalten sich daher wie ihre Höhen, oder auch, weil die Seiten R p, und m p in einerley Richtung liegen, wie diese Seiten.

Nun kann durch die Abnahme von P p das Verhältniß M P : m p und also auch das Verhältniß R p : m p dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen; mithin auch das Verhältniß der Parallelogramme. Da die Fläche P M Q m p ihrer Größe nach zwischen beyden Parallelogrammen enthalten ist, so kann sich also auch das Verhältniß des Parallelogrammes P R zur Fläche P M Q m p dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nähern. Ueber dieß steht P R mit P p gerade in Proportion; also ist das Parallelogramm P R das Differentiale der Fläche B E P M, wenn man P p als Differentiale der Abscisse annimmt. (§. 122.) Da die Größe dieses Parallelogrammes $=$ M P . P p. sin. M P p ist, so hat man also

$dV = y\,dx \sin.\alpha$, und daraus

$V = \sin.\alpha \int y\,dx + C$; mithin für rechtwinklige Coordinaten, $V = \int y\,dx + C$.

Z. B. für die Linie, deren Gleichung,

$y = x + \frac{b}{a^3} x^3 - \frac{x^4}{a^3}$ ist (§. 261.), wird

$$\int y\,dx = \int (x\,dx + \frac{b}{a^3} x^3\,dx - \frac{x^4}{a^3}\,dx)$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 + \frac{b\,x^4}{4\,a^3} - \frac{x^5}{5a^3}, \text{ also}$$

$$V = x^2 \sin.\alpha\,(\tfrac{1}{2} + \frac{b\,x^2}{4\,a^3} - \frac{x^3}{5a^3}) + C.$$

Will man die Größe der Fläche vom Anfangspuncte aus, so muß für $x = o$ auch $V = o$ seyn, woraus $C = o$ folgt; dann ist also $V = x^2 \sin.\alpha\,(\tfrac{1}{2} + \frac{b\,x^2}{4\,a^3} - \frac{x^3}{5a^3})$.

Setzt man $x = \tfrac{1}{2} b$, so erhält man

$V = \frac{b^2\,(40\,a^3 + 3\,b^3) \sin.\alpha}{320\,a^3}$ als die Größe der Fläche zwischen den Ordinaten der beyden Wendungspuncte.

§. 278.

Fig. 7. Wenn sich bey Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die Ebene einer krummen Linie B M um die Abscissen-Linie X'X dreht, so beschreiben die Ordinaten der Endpuncte B und M parallele Kreise, und der Bogen B M eine krumme Fläche.

Der von dieser krummen Fläche und den parallelen Kreisen begrenzte, also durch die Umdrehung der Figur E B M P erzeugte Körper heißt ein Sphäroid, und die krumme vom Bogen B M beschriebene Fläche die Oberfläche des Sphäroides.

§. 279.

Läßt man die Abscisse des Punctes M um P p $= \Delta x$ zunehmen, so nimmt das Sphäroid um denjenigen Theil zu, welcher von der Figur P M Q m p beschrieben wird; die Oberfläche des Sphäroides wächst aber um die Fläche, welche der Bogen M Q m beschreibt.

Diese Fläche ist also $= \Delta W$, und der von P M Q m p be-

schriebene Körper $= \triangle K$, wenn K die Größe des Sphäroides, und VV die Größe seiner Oberfläche bezeichnet.

§. 280.

Bey der Umdrehung beschreibt das Stück M t der Tangente des Punctes M die Seitenfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels, dessen Grundflächen die beyden von M P und t p beschriebenen Kreise sind.

Da $\pi (MP + tp) Mt$ die Größe dieser Seitenfläche ausdrückt, und der Unterschied zwischen t p und M P durch die Abnahme von P p beliebig klein werden kann, so kann sich also auch das Verhältniß
$\pi (MP + tp) Mt : 2\pi MP . Mt$ dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nähern.

Durch die Abnahme von P p kann aber der Winkel m M t beliebig klein werden (§. 245.), und das Verhältniß des Bogens M Q m zur Linie M t dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen (§. 249.); mithin hat dieses auch beym Verhältnisse der von M t und M Q m beschriebenen Flächen, d. i. beym Verhältnisse $\pi (MP + tp) Mt : \triangle VV$ Statt. Aus diesem folgt, daß sich auch das Verhältniß $2\pi MP . Mt : \triangle VV$ durch die Abnahme von $\triangle x$ dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nähern könne.

Es drückt aber $2\pi MP . Mt$ die Größe eines Rechteckes aus, dessen Grundlinie so groß ist, als die vom Puncte M bey der Umdrehung beschriebene Kreislinie, und dessen Höhe dem Stücke M t der Tangente gleich ist.

Dieses Rechteck ist der Linie M t und also auch der Linie P p gerade proportionirt; daher ist dasselbe das Differentiale der krummen Fläche W, wenn man P p als Differentiale der Abscisse annimmt (§. 122.).

Allein, wenn man $P p = d x$ setzt, so ist $M t = d s = (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 250.); mithin hat man

$dW = 2\pi y\,ds = 2\pi y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und daraus

$W = 2\pi \int y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

Z. B. für den Kreis findet man aus seiner Gleichung: $x^2 + y^2 = a^2$ (§. 226.),

$W = 2\pi \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} a\,dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + C = 2axx\pi + C,$

und $C = o$, wenn man für $x = o$ auch $W = o$ setzt, also den Anfangspunct B des Bogens B M (Fig. 3.) in der Linie annimmt, welche durch den Mittelpunct A auf dem als Abscissen-Linie angenommenen Durchmesser senkrecht ist.

Diese Formel: $W = 2axx\pi$ gibt für $x = a$ die Größe der halben Kugelfläche $= 2a^2\pi$, und mithin die Größe der ganzen $= 4a^2\pi$.

§. 281.

Fig. 7. Die durch m zu X′ X Parallele m r bestimmt ein Rechteck, durch dessen Umdrehung um X′ X ein senkrechter Cylinder beschrieben wird, dessen Höhe $= P p$, und von dessen Grundfläche, m p der Radius ist.

Das Rechteck P R beschreibt einen Cylinder von eben derselben Höhe, wozu aber M P als Radius der Grundfläche gehört; beyde Cylinder verhalten sich also wie die Quadrate dieser Radien.

Da nun das Verhältniß $MP^2 : mp^2$ durch die Abnahme von P p dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen kann, so hat dieses nicht nur bey dem Verhältnisse dieser beyden Cylinder, sondern auch bey dem Verhältnisse des von P R beschriebenen Cylinders zum Theile $\triangle K$ des Sphäroides Statt, welcher von der Fläche P M Q m p beschrieben wird; weil dieser Theil seiner Größe nach immer zwischen den beyden Cylindern enthalten ist.

Ferner ist der von P R beschriebene Cylinder seiner Höhe P p proportional, weil während der Abnahme von P p die von M P beschriebene Grundfläche unverändert bleibt.

Aus diesen Gründen ist also der angeführte Cylinder das Differentiale des Sphäroides K, wenn man P p als Differentiale der Abscisse annimmt (§. 122.).

Man hat daher $dK = \pi M P^2 . P'p = \pi y^2 dx$, und daraus $K = \pi \int y^2 dx + C$.

Z. B. für den Kreis ist $y^2 = a^2 - x^2$ (§. 226.), also $K = \pi \int (a^2 dx - x^2 dx) + C = (a^2 x - \frac{1}{3} x^3) \pi + C$.

Nimmt man an, daß der Anfangspunct B (Fig. 3.) des Bogens B M in der Abscissen-Linie auf der Seite A X′ liege, so ist $K = o$, wenn $x = -a$ ist (§. 224.), also $o = (-a^3 + \frac{1}{3} a^3) . \pi + C$; folglich ist $C = \frac{2}{3} a^3 \pi$, und daher $K = \frac{1}{3} \pi (2 a^3 + 3 a^2 x - x^3)$, welches also der Inhalt des vom Kreise, der durch M P beschrieben wird, begrenzten Kugelabschnittes ist.

Setzt man $x = a$, so folgt daraus der Inhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3} a^3 \pi$.

VIII. Abschnitt.

Von den Differentialen der trigonometrischen Linien und ihrem Gebrauche.

§. 282.

Fig. 11. Aus dem beliebigen Puncte M einer Kreislinie sey M P auf dem Radius A C senkrecht; durch einen willkürlichen Punct t der Tangente des Punctes M sey t p zu M P und durch M, M R zu A C parallel; so ist, wenn man M t als das Differentiale des Bogens A M annimmt, t R das Differentiale von M P (§. 251.).

Zieht man M C, so ist $\triangle M P C \sim \triangle M R t$; also verhält sich $M C : P C = M t : t R$, nämlich $A C : P C =$ d. A M : d. M P.

Es ist aber, wenn A M mit φ bezeichnet wird, $MP = \sin\varphi$ und $PC = \cos\varphi$; folglich für $AC = 1$, $1 : \cos\varphi = d\varphi : d\sin\varphi$, daher $d\sin\varphi = \cos\varphi\, d\varphi$.

Da φ jeden beliebigen Werth haben kann, so ist also auch $d\sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi)\, d(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$.

Allein $\frac{1}{2}\pi$ ist die Länge des Quadranten, wenn der Radius $= 1$ ist, folglich $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ das Complement von φ, mithin $\sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \cos\varphi$ und $\cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin\varphi$. Ferner ist $d(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = -d\varphi$; daher $d\cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi$.

§. 283.

Da jede trigonometrische Linie eines Kreisbogens auf eine einfache Weise durch dessen Sinus und Cosinus ausgedrückt werden kann, so lassen sich die Differentialen der übrigen trigonometrischen Linien durch das Differentiale des Bogens ausgedrückt, aus dem Differentiale des Sinus und des Cosinus leicht ableiten.

Es ist nämlich $\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, also

$$d\,\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos\varphi\, d\sin\varphi - \sin\varphi\, d\cos\varphi}{\cos^2\varphi} \text{ (§. 134.)}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi + \sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \text{ (§. 282.)}$$

$$= \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi\, d\varphi;$$

$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$, folglich

$$d\sec\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\cos^2\varphi} \text{ (§. 133.)} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \cdot d\varphi = \text{tang}\,\varphi \sec\varphi\, d\varphi;$$

$\text{sin vers}\,\varphi = 1 - \cos\varphi$, mithin

$d\,\text{sin vers}\,\varphi = -d\cos\varphi = \sin\varphi\, d\varphi$.

Es ist also auch

$$d\,\text{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \frac{d(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi - \varphi)} = \sec^2(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, d(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$

$$\text{d sec } (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi)\,\text{d}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}$$

$$= \text{tang } (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) \sec (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\,\text{d}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$

und $\text{d sin vers } (\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi)\,\text{d}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$;

nämlich

$$\text{d cotang } \varphi = -\frac{\text{d}\varphi}{\sin^2\varphi} = -\text{d}\varphi \operatorname{cosec}^2\varphi;$$

$$\text{d cosec } \varphi = -\frac{\cos\varphi\,\text{d}\varphi}{\sin^2\varphi} = -\text{cotang } \varphi \operatorname{cosec}\varphi\,\text{d}\varphi,$$

und

$$\text{d cos vers } \varphi = -\cos\varphi\,\text{d}\varphi.$$

§. 284.

Aus den vorhergehenden Differentialen ist also

$$\int \cos\varphi\,\text{d}\varphi = \sin\varphi \text{ oder} = -\text{cos vers } \varphi,$$

$$\int \sin\varphi\,\text{d}\varphi = -\cos\varphi \text{ oder} = \text{sin vers } \varphi,$$

$$\int \frac{\text{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \int \sec^2\varphi\,\text{d}\varphi = \text{tang } \varphi,$$

$$\int \frac{\text{d}\varphi}{\sin^2\varphi} = \int \operatorname{cosec}^2\varphi\,\text{d}\varphi = -\text{cotang } \varphi,$$

$$\int \text{tang } \varphi \sec\varphi\,\text{d}\varphi = \sec\varphi,$$

$$\int \text{cotang } \varphi \operatorname{cosec}\varphi\,\text{d}\varphi = -\operatorname{cosec}\varphi.$$

Anmerkung.

Aus $\int \cos\varphi\,\text{d}\varphi = \sin\varphi$, und $\int \cos\varphi\,\text{d}\varphi = -\text{cos vers } \varphi$ kann nicht gefolgert werden, daß $\sin\varphi = -\text{cos vers } \varphi$ sey; denn $\int \cos\varphi\,\text{d}\varphi = \sin\varphi$ oder $= -\text{cos vers } \varphi$ zeigt nur an, daß $\sin\varphi$ und $-\text{cos vers } \varphi$ Größen seyen, deren Differentiale $\cos\varphi\,\text{d}\varphi$ ist; diese Größen können also noch einen beständigen Unterschied haben (§. 181.), welches hier auch wirklich der Fall ist, denn $\sin\varphi - (-\text{cos vers } \varphi) = \sin\varphi + \text{cos vers } \varphi = 1$.

§. 285.

Da sich jede trigonometrische Linie durch eine beliebige andere ausdrücken läßt, so kann das Differentiale einer jeden trigono-

metrischen Linie durch die Linie selbst und durch das Differentiale des Bogens angegeben werden.

Man erhält auf diese Art ausgedrückt,

$d \sin \varphi = d\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ und

$d \cos \varphi = -d\varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$,

weil $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ und $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ ist.

Ferner ist $\sec^2 \varphi = 1 + \text{tang}^2 \varphi$ und $\text{cosec}^2 \varphi = 1 + \text{cotang}^2 \varphi$, also

$d \,\text{tang}\, \varphi = (1 + \text{tang}^2 \varphi)\, d\varphi$ und

$d \,\text{cotang}\, \varphi = -(1 + \text{cotang}^2 \varphi)\, d\varphi$;

dann wird

$d \sec \varphi = \sec \varphi \, d\varphi \sqrt{\sec^2 \varphi - 1}$ und

$d \,\text{cosec}\, \varphi = -\text{cosec}\, \varphi \, d\varphi \sqrt{\text{cosec}^2 \varphi - 1}$,

denn es ist $\text{tang}\, \varphi = \sqrt{\sec^2 \varphi - 1}$ und $\text{cotang}\, \varphi = \sqrt{\text{cosec}^2 \varphi - 1}$.

Endlich ist $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - (1 - \text{sin vers}\, \varphi)^2}$

$= \sqrt{2 \,\text{sin vers}\, \varphi - \text{sin vers}^2 \varphi}$

und $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - (1 - \text{cos vers}\, \varphi)^2}$

$= \sqrt{2 \,\text{cos vers}\, \varphi - \text{cos vers}^2 \varphi}$,

also

$d \,\text{sin vers}\, \varphi = d\varphi \sqrt{2 \,\text{sin vers}\, \varphi - \text{sin vers}^2 \varphi}$ und

$d \,\text{cos vers}\, \varphi = -d\varphi \sqrt{2 \,\text{cos vers}\, \varphi - \text{cos vers}^2 \varphi}$.

§. 236.

Aus den Formeln des vorhergehenden §. kann das Differentiale des Bogens durch das Differentiale einer beliebigen trigonometrischen Linie, und durch diese Linie selbst angegeben werden. So ist aus der ersten, $d\varphi = \frac{d \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$; also, wenn man $\sin \varphi$ mit x bezeichnet,

$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; d. h. $dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

ist das Differentiale eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogens, dessen Sinus $= x$ ist.

Man bezeichnet einen solchen Kreisbogen mit arc (sin = x), und erhält also nach dieser Bezeichnung:

$$d\,arc\,(sin = x) = dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnet man durch x der Ordnung nach den Cosinus, die Tangente, die Cotangente, die Secante, die Cosecante, den Sinus versus und den Cosinus versus des Bogens φ, so erhält man aus den übrigen Formeln des vorhergehenden §.

$$d\,arc\,(cos = x) = -dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$d\,arc\,(tang = x) = dx(1 + x^2)^{-1},$$
$$d\,arc\,(cotang = x) = -dx(1 + x^2)^{-1},$$
$$d\,arc\,(sec = x) = x^{-1}\,dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$
$$d\,arc\,(cosec = x) = -x^{-1}\,dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$
$$d\,arc\,(sin\ vers = x) = dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$d\,arc\,(cos\ vers = x) = -dx\,(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

§. 287.

Daraus folgt

$$\int dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = arc\,(sin = x) = -arc\,(cos = x),$$
$$\int dx\,(1 + x^2)^{-1} = arc\,(tang = x) = -arc\,(cotang = x),$$
$$\int x^{-1}\,dx\,(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = arc\,(sec = x) = -arc\,(cosec = x),$$
$$\int dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ oder}$$
$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx(2 - x)^{-\frac{1}{2}} = arc(sin\ vers = x) = -arc(cos\ vers = x).$$

§. 288.

Wenn sich die vorhergehenden binomischen Differentialen: $dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $dx(1 + x^2)^{-1}$ ꝛc. nach §. 199. oder §. 200. integriren ließen, so könnte man die Längen der Kreisbögen als algebraische oder logarithmische Functionen ihrer trigonometrischen Linien darstellen; allein bey keinem von ihnen ist, wenn man sie unter $x^m\,dx\,(\alpha + \beta x^n)^p$ subsumirt, $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive, oder $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze negative Zahl; auch ha-

ben die Glieder der Binomien nicht die erforderlichen Zeichen, um nach §. 201. integrirt werden zu können.

§. 289.

In §. 276. wurde die Verhältnißzahl π des Durchmessers zum Umkreise auf eine viel leichtere Art berechnet, als es durch die Hülfsmittel geschehen kann, welche die Elementar-Geometrie zu diesem Zwecke darbiethet; allein der Ausdruck für die Länge eines Kreisbogens durch seine Tangente, aus der Formel

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = \int dx\,(1+x^2)^{-1} \quad (\S.\,287.)$$

führt auf eine zur Berechnung bequemere Reihe.

Wenn man nämlich $dx(1+x^2)^{-1}$ nach §. 196. integrirt, so erhält man

$$\text{arc. (tang.} = x) = \int dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots)$$
$$= \int (dx - x^2\,dx + x^4\,dx - x^6\,dx + x^8\,dx - \ldots)$$
$$= x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots$$

wobey Const. $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch arc. (tang. $= x$) $= 0$ seyn muß.

Man setze, der Bogen von $45°$, dessen Länge $= \frac{1}{4}\pi$, und dessen Tangente $= 1$ bey dem angenommenen Radius ist, sey in zwey Theile α und β so getheilt, daß tang. $\alpha = \frac{1}{2}$; so findet man durch die Formel $\text{tang.}\,(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta}{1 - \text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\beta}$, wenn man tang. $(\alpha+\beta) = $ tang. $45° = 1$, und tang. $\alpha = \frac{1}{2}$ setzt, tang. $\beta = \frac{1}{3}$. Also wird für $x = \frac{1}{2}$,

$$\alpha = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots;$$ und für $x = \tfrac{1}{3}$,

$$\beta = \tfrac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots;$$

folglich, weil $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$ ist,

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots$$

Die Brüche: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}$ ... lassen sich dadurch leicht in Decimal-Brüche verwandeln, daß man den ersten, oder 0,5 durch die Zahl 4, diesen wieder durch 4 u. s. w. dividirt; eben so kann man mit den Brüchen $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}$ ... verfahren, wobey man aber die Zahl 9 als Divisor zu nehmen hat.

Dividirt man hierauf sowohl die eine als die andere Reihe von Decimal-Brüchen der Ordnung nach durch die ungeraden Zahlen: 1, 3, 5, 7..., so sind die Glieder der für $\frac{1}{4}\pi$ gefundenen Reihe in Decimal-Brüchen ausgedrückt, woraus sich dann leicht der Werth von π ergibt. Die angezeigte Rechnung ist also folgende:

1	: 2	=	0,500000000
1	: 2^3	=	125000000
1	: 2^5	=	31250000
1	: 2^7	=	7812500
1	: 2^9	=	1953125
1	: 2^{11}	=	488281
1	: 2^{13}	=	122070
1	: 2^{15}	=	30518
1	: 2^{17}	=	7629
1	: 2^{19}	=	1907
1	: 2^{21}	=	477
1	: 2^{23}	=	119
1	: 2^{25}	=	30
1	: 2^{27}	=	7
1	: 2^{29}	=	2
1	: 3	=	0,333333333
1	: 3^3	=	37037037
1	: 3^5	=	4115226
1	: 3^7	=	457247
1	: 3^9	=	50805
1	: 3^{11}	=	5645
1	: 3^{13}	=	627
1	: 3^{15}	=	70
1	: 3^{17}	=	8
1	: 3^{19}	=	1

1	: 2	=	0,500000000
1	: 3	=	333333333
1	: 5.2^5	=	6250000
1	: 5.3^5	=	823045
1	: 9.2^9	=	217014
1	: 9.3^9	=	5645
1	: 13.2^{13}	=	9390
1	: 13.3^{13}	=	48
1	: 17.2^{17}	=	449
1	: 17.3^{17}	=	0
1	: 21.2^{21}	=	23
1	: 25.2^{25}	=	1
1	: 29.2^{29}	=	0

0,840638948 = der Summe der positiven Glieder.

1	: 3.2^3	=	0,041666667
1	: 3.3^3	=	12345679
1	: 7.2^7	=	1116071
1	: 7.3^7	=	65321
1	: 11.2^{11}	=	44389
1	: 11.3^{11}	=	513
1	: 15.2^{15}	=	2035
1	: 15.3^{15}	=	5
1	: 19.2^{19}	=	100
1	: 19.3^{19}	=	0
1	: 23.2^{23}	=	5
1	: 27.2^{27}	=	0

0,055240785 = der Summe der negativen Glieder.

Die Differenz ist also

$$0{,}785398163 = \tfrac{1}{4}\pi, \text{ mithin}$$

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

weil die 9te Decimal-Ziffer nicht zuverlässig richtig ist.

§. 290.

Weil die Länge der Peripherie $= 2a\pi$ ist, wenn man den Radius $= a$ setzt, so ist die Länge eines Bogens, welcher eine Secunde enthält, $= \frac{2a\pi}{360.60^2} = \frac{a\pi}{180.60^2}$. So oft diese Länge in a enthalten ist, so viele Secunden enthält ein Bogen, dessen Länge dem Radius gleich ist; die Zahl dieser Secunden ist also

$$a : \frac{a\pi}{180.60^2} = \frac{648000}{\pi} = \frac{648000}{3,14159265} = 206265.$$

Ist nun überhaupt die Länge eines Bogens $= \varphi$, und die Zahl seiner Secunden $= n$, so verhält sich $a : \varphi = 206265 : n$; mithin ist

$$\varphi = \frac{na}{206265} \text{ und } n = \frac{206265\,\varphi}{a}.$$

Durch diese Formeln läßt sich aus der gegebenen Zahl der Secunden eines Kreisbogens dessen Länge, und umgekehrt, berechnen.

Wenn der Radius $= 1$ ist, so wird

$$\varphi = \frac{n}{206265} \text{ und } n = 206265\varphi.$$

§. 291.

Entwickelt man die übrigen in §. 287. angezeigten Integralen, wie $\int dx\,(1+x^2)^{-1}$, so erhält man Reihen, welche die Größe des Kreisbogens durch jede von den übrigen trigonometrischen Linien ausgedrückt angeben, wie $\int dx\,(1+x^2)^{-1}$ durch die Tangente. Durch die Umkehrung dieser Reihen (§. 107.) würde man dann andere erhalten, welche die Größe der trigonometrischen Linien aus der Länge des Bogens angeben.

Allein diese Reihen können auch unmittelbar vermittelst des Taylor'schen Lehrsatzes (§. 149.) gefunden werden; denn es ist diesem Satze zu Folge

$$\sin.(\varphi+u) = \sin.\varphi + \frac{u}{1} \cdot \frac{d\sin.\varphi}{d\varphi} + \frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\sin.\varphi}{d\varphi^2} + \ldots;$$

aber (§. 282. und 143.) $d\sin.\varphi = \cos.\varphi\,d\varphi$, $d^2\sin.\varphi =$

$-\sin.\varphi\, d\varphi^2$, $d^3 \sin.\varphi = -\cos.\varphi\, d\varphi^3$, $d^4 \sin.\varphi = +\sin.\varphi\, d\varphi^4$, $d^5 \sin.\varphi = +\cos.\varphi\, d\varphi^5$, $d^6 \sin.\varphi = -\sin.\varphi\, d\varphi^6$, $d^7 \sin.\varphi = -\cos.\varphi\, d\varphi^7$ ꝛc.;

also

$$\sin.(\varphi+u) = \sin.\varphi + \frac{u}{1}\cos.\varphi - \frac{u^2}{1.2}\sin.\varphi - \frac{u^3}{1.2.3}\cos.\varphi + \frac{u^4}{1.2.3.4}\sin.\varphi + \frac{u^5}{1.2.3.4.5}\cos.\varphi - \frac{u^6}{1.2\ldots6}\sin.\varphi - \frac{u^7}{1.2\ldots7}\cos.\varphi \ldots$$

Setzt man $\varphi = 0$, so wird $\sin.\varphi = 0$ und $\cos.\varphi = 1$, also

$$\sin.u = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} \ldots$$

Eben so ist

$$\cos.(\varphi+u) = \cos.\varphi + \frac{u}{1}\cdot\frac{d\cos.\varphi}{d\varphi} + \frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\cos.\varphi}{d\varphi^2} + \ldots,$$

$d\cos.\varphi = -\sin.\varphi\, d\varphi$, $d^2\cos.\varphi = -\cos.\varphi\, d\varphi^2$, $d^3\cos.\varphi = +\sin.\varphi\, d\varphi^3$, $d^4\cos.\varphi = +\cos.\varphi\, d\varphi^4$, $d^5\cos.\varphi = -\sin.\varphi\, d\varphi^5$, $d^6\cos.\varphi = -\cos.\varphi\, d\varphi^6$ ꝛc.; daher

$$\cos.(\varphi+u) = \cos.\varphi - \frac{u}{1}\sin.\varphi - \frac{u^2}{1.2}\cos.\varphi + \frac{u^3}{1.2.3}\sin.\varphi + \frac{u^4}{1.2.3.4}\cos.\varphi - \frac{u^5}{1.2\ldots5}\sin.\varphi - \frac{u^6}{1.2\ldots6}\cos.\varphi \ldots;$$

folglich, wenn man $\varphi = 0$ setzt,

$$\cos.u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} \ldots$$

Auf diese Art können auch die übrigen trigonometrischen Linien durch den Bogen ausgedrückt werden.

§. 292.

Da vermittelst der trigonometrischen Tabellen die Grade, Minuten und Secunden des Bogens gefunden werden können, welcher einer gegebenen trigonometrischen Linie zugehört, und daraus die Länge des Bogens abgeleitet werden kann, so sind

durch die Formeln (§. 287.) die Integralen der binomischen Differentialen $dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $dx(1+x^2)^{-1}$ ꝛc. gegeben.

Aus diesen lassen sich die Integralen anderer binomischen Differentialen, welche allgemeiner sind, auf folgende Art ableiten:

Jedes Differentiale von der Form: $x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p$ läßt sich so verwandeln, daß das beständige Glied des Binomiums $= 1$ wird; es ist nämlich nach der im §. 197. angegebenen Regel,

$$x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p = \alpha^p x^m dx(1+\alpha^{-1}\beta x^n)^p.$$

Aus $1+\alpha^{-1}\beta x^n$ wird $1+v^2$, wenn man $\alpha^{-1}\beta x^n = v^2$ setzt; dadurch wird aber $x = \alpha^{-\frac{1}{n}} \beta^{-\frac{1}{n}} v^{\frac{2}{n}}$, $x^m = \alpha^{-\frac{m}{n}} \beta^{-\frac{m}{n}} v^{\frac{2m}{n}}$

und $dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{1}{n}} \beta^{-\frac{1}{n}} v^{\frac{2}{n}-1} dv$;

folglich verwandelt sich $x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p$ in

$$\frac{2}{n} \alpha^{p+\frac{m+1}{n}} \beta^{-\frac{m+1}{n}} v^{\frac{2(m+1)}{n}-1} dv(1+v^2)^p$$ und es wird

$$\int x^m dx(\alpha+\beta x^n)^p = \frac{2}{n} \alpha^{p+\frac{m+1}{n}} \beta^{-\frac{m+1}{n}} \int v^{\frac{2(m+1)}{n}-1} X$$

$dv(1+v^2)^p$.

Nun ist $\int v^0 dv(1+v^2)^{-1} = \text{arc. (tang.} = v)$ (§. 287.), also, wenn $p = -1$, und $\frac{2(m+1)}{n} - 1 = 0$, nämlich $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ ist,

$$\int x^{\frac{n}{2}-1} dx(\alpha+\beta x^n)^{-1} = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} \text{arc. (tang.} = v);$$

folglich, wegen $v = \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}}$,

I.) $\int x^{\frac{n}{2}-1} \, dx \, (\alpha + \beta x^n)^{-1} = \frac{2}{n\sqrt{\alpha\beta}}$ arc. (tang. $= \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}$).

Durch eben dieselbe Substitution: $\alpha^{-1} \beta x^n = v^2$, wird

$$\int x^m \, dx \, (\alpha - \beta x^n)^p = \frac{2}{n} \alpha^{p + \frac{m+1}{n} - \frac{m+1}{n}} \beta^{\frac{2(m+1)}{n} - 1} \int v \, X$$

$dv \, (1 - v^2)^p$, und es ist $\int dv \, (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} =$ arc. (sin. $= v$) bekannt (§. 287.);
folglich ist für $p = -\frac{1}{2}$ und

$\frac{2(m+1)}{n} - 1 = 0$ oder $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$,

$\int x^{\frac{n}{2}-1} dx \, (\alpha - \beta x^n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n} \alpha^0 \beta^{-\frac{1}{2}}$ arc. (sin. $= v$), nämlich

II.) $\int x^{\frac{n}{2}-1} \, dx \, (\alpha - \beta x^n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\beta}}$ arc. (sin. $= \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}$).

Auf die nämliche Weise findet man

$$\int x^m \, dx \, (\beta x^n - \alpha)^p = \frac{2}{n} \alpha^{p + \frac{m+1}{n}} \beta^{-\frac{m+1}{n}} \int v \, X$$

$dv \, (v^2 - 1)^p$;

folglich, da $\int v^{-1} \, dv \, (v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} =$ arc. (sec. $= v$) ist (287.), wird für $p = -\frac{1}{2}$ und $\frac{2(m+1)}{n} - 1 = -1$, (welches der Fall ist, wenn $\frac{m+1}{n} = 0$, mithin $m = -1$ ist),

$\int x^{-1} \, dx \, (\beta x^n - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^0$ arc. (sec. $= \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}$).

Bey der Berechnung des Werthes, welcher diesem Integrale bey bestimmten Werthen von α, β, x und n zukömmt, muß die Länge des Kreisbogens aus seiner Secante gefunden werden.

Da aber, wenn man die Logarithmen bey der Rechnung anwendet, die der Secanten in den trigonometrischen Tafeln gewöhnlich nicht unmittelbar angetroffen werden, so hat diese Formel einige Unbequemlichkeit, welche auf folgende Art vermieden wird:

Man setze arc. $(\sec. = \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}) = \varphi$, so ist $\sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}} = \sec. \varphi$, also $\cos. \varphi = \frac{1}{\sec. \varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x^n}}$; mithin ist auch $\varphi = \text{arc.}(\cos. = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x^n}})$, d. h. $\text{arc.}(\sec. = \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}) = \text{arc.}(\cos. = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x^n}})$; folglich

$$\text{III.)} \int x^{-1} dx (\beta x^n - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\alpha}} \text{arc.}\left(\cos. = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x^n}}\right).$$

Anmerkung 1.

Aus dem bey der Verwandlung dieser Formel angewandten Verfahren läßt sich abnehmen, wie ein Kreisbogen, welcher als Function einer seiner trigonometrischen Linien gegeben ist, als Function einer jeden andern trigonometrischen Linie ausgedrückt werden könne.

Die im §. entwickelten Formeln lassen sich also unter mehrern Formen darstellen.

Anmerkung 2.

Wenn man auf ähnliche Art die Integrirung des Binomiums

$x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ auf $\int v^{-\frac{1}{2}} dv (2 - v)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc}(\sin \text{vers} = v)$ (§. 287.) bringen will, so findet man, daß das veränderliche Glied negativ, $p = -\frac{1}{2}$ und $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ seyn müsse, wie in nro. II.

Die Formel: $\int v^{-\frac{1}{2}} dv (2-v)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc (sin vers} = v)$ führt also auf keinen neuen Fall für die Integrirung des Binomiums $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$.

§. 293.

Aus der Vergleichung der so eben gefundenen Integral-Formeln mit denen des §. 201. ergibt sich, daß sich binomische Differentialen auch dann integriren lassen, wenn sie nach §. 201. aus dem Grunde allein nicht integrirt werden können, weil die Zeichen der Glieder des Binomiums nicht so beschaffen sind, wie daselbst erfordert wird.

Ob daher ein binomisches Differentiale von der Form $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ überhaupt integrirt werden könne oder nicht, hängt also nicht mehr von den Zeichen der Glieder des Binomiums ab, sondern bloß von den Exponenten der vorkommenden Potenzen.

Es läßt sich demnach außer den Fällen (§. 199. u. §. 200.) noch integriren,

1.) wenn $\frac{m+1}{n}$ ein Bruch mit dem Nenner 2, und dabey p entweder auch ein solcher Bruch (§. 208. nro. 2.), oder eine ganze negative Zahl ist (§. 208. nro. 1.); und

2.) wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze negative Zahl, oder Null, und dabey p ein Bruch mit dem Nenner 2 ist (§. 208. nro. 3.).

Anmerkung.

Des Falles, in welchem beyde Glieder des Binomiums negativ sind, wurde bisher gar nicht erwähnt; sollte er jedoch vorkommen, so darf man nur bemerken, daß für jede ungerade ganze Zahl p, $(-\alpha - \beta x^n)^p = -(\alpha + \beta x^n)^p$, für jede gerade ganze Zahl p, $(-\alpha - \beta x^n)^p = (\alpha + \beta x^n)^p$, und wenn p ein Bruch mit dem Nenner 2 ist, $(-\alpha - \beta x^n)^p$ im Allgemeinen unmöglich ist.

* §. 294.

Trinomien von der Form $x^m dx (\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^p$ können daher durch die Verwandlung in Binomien ebenfalls immer integrirt werden,

1.) wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, und p entweder eine ganze negative Zahl, oder ein Bruch mit dem Nenner 2 ist (§. 209.);

2.) wenn $\frac{m+1}{n}+2p$ eine ganze negative Zahl, und p auch eine ganze negative Zahl, oder ein Bruch mit dem Nenner 2 ist (§. 210.).

§. 295.

Es wird nicht undienlich seyn, die gefundenen Integral- und Reductions- oder Verwandlungs-Formeln für binomische Differentialen hier zusammen zu stellen.

Integral-Formeln.

I. 1, 2) $\int x^{\frac{n}{2}-1} dx (\pm\alpha \mp \beta x^n)^{-1} =$

$$\pm\frac{1}{n\sqrt{\alpha\beta}} L\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta x^n}}{\pm\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta x^n}}\right) \text{ (§. 201. I.)}$$

3) $\int x^{\frac{n}{2}-1} dx (\alpha+\beta x^n)^{-1} = \frac{2}{n\sqrt{\alpha\beta}} \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}\right)$

(§. 292. I.)

II. 1, 2) $\int x^{\frac{n}{2}-1} dx (\beta x^n \pm \alpha)^{-\frac{1}{2}} =$

$$\frac{2}{n\sqrt{\beta}} L\left(\sqrt{\beta x^n}+\sqrt{\beta x^n \pm \alpha}\right) \text{ (§. 201. II.)}$$

3) $\int x^{\frac{n}{2}-1} dx (\alpha-\beta x^n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\beta}} \text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{\beta x^n}{\alpha}}\right)$

(§. 292. II.)

III. 1, 2) $\int x^{-1} dx (\alpha \pm \beta x^n)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{n\sqrt{\alpha}} L\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha\pm\beta x^n}}{\sqrt{x^n}}\right)$

(§. 201. III.)

3) $\int x^{-1} dx (\beta x^n - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n\sqrt{\alpha}} \text{arc} \left(\cos = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta x^n}}\right)$

(§. 292. III.)

Reductions-Formeln.

A) $\int x^m dx (\alpha + \beta x^n)^{p+1} =$

$$\frac{x^{m+1} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{m+1+n(p+1)} + \frac{n(p+1)\alpha}{m+1+n(p+1)} \int x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$$

(§. 202.)

B) $\int x^m dx (\alpha + \beta x^n)^{p-1} =$

$$-\frac{x^{m+1} (\alpha + \beta x^n)^p}{n p \alpha} + \frac{m+1+np}{n p \alpha} \int x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$$

(§. 202.)

C) $\int x^{m+n} dx (\alpha + \beta x^n)^p =$

$$\frac{x^{m+1} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{[m+1+n(p+1)]\beta} - \frac{(m+1)\alpha}{[m+1+n(p+1)]\beta} \int x^m dx.$$

$(\alpha + \beta x^n)^p$ (§. 203.)

D) $\int x^{m-n} dx (\alpha + \beta x^n)^p =$

$$\frac{x^{m+1-n} (\alpha + \beta x^n)^{p+1}}{(m+1-n)\alpha} - \frac{(m+1+np)\beta}{(m+1-n)\alpha} \int x^m dx.$$

$(\alpha + \beta x^n)^p$ (§. 203.).

Zur fernern Erläuterung der Anwendung dieser Formeln diene noch folgendes

*Beyspiel.

$x^{-3} dx (1 + 2x^2 + 3x^4)^{-1}$ zu integriren. —

Für dieses Trinomium ist $\frac{m+1}{n} = -1$, $\frac{m+1}{n} + 2p = -3$, und p eine ganze negative Zahl; also verwandle man dasselbe in $x^{-7} dx (x^{-4} + 2x^{-2} + 3)^{-1}$ (§. 210.) und setze $x^{-2} = z - 1$ (§. 209.), so wird

$x^{-7} dx (x^{-4} + 2x^{-2} + 3)^{-1} = -\frac{1}{2} (z-1)^2 dz (z^2 + 2)^{-1}$

und daher

$\int x^{-3}\,dx\,(1+2x^2+3x^4)^{-1} = -\frac{1}{2}\int[z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1} - 2z\,dz\,(z^2+2)^{-1} + dz\,(z^2+2)^{-1}] = -\frac{1}{2}\int z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1} + \int z\,dz\,(z^2+2)^{-1} - \frac{1}{2}\int dz\,(z^2+2)^{-1}$.

Für $z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1}$ ist nun $\frac{m+1}{n} = \frac{3}{2}$ ein Bruch mit dem Nenner 2, und $p = -1$ eine ganze negative Zahl. Für $z\,dz\,(z^2+2)^{-1}$ ist $\frac{m+1}{n} = 1$ eine ganze positive Zahl, und für $dz\,(z^2+2)^{-1}$ ist $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ und $p = -1$.

Man findet daher nach §. 199., oder auch nach §. 195., $\int z\,dz\,(z^2+2)^{-1} = \frac{1}{2}L(z^2+2)$; die Integral-Formel I. 3. gibt $\int dz\,(z^2+2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{z}{\sqrt{2}})$, und aus diesem letztern Integrale läßt sich $\int z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1}$ vermittelst der Reductions-Formel C finden, weil die Differentialen $z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1}$ und $dz\,(z^2+2)^{-1}$ nur so verschieden sind, daß der durch n dividirte Unterschied der Werthe von m die ganze positive Zahl 1 zum Quotienten gibt (§. 206.).

Man setze deßhalb in der genannten Reductions-Formel, $x = z$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $m = 0$, $n = 2$ und $p = -1$; so ist $[m+1+n(p+1)]\beta = 1$ und $(m+1)\alpha = 2$, folglich

$$\int z^2\,dz\,(z^2+2)^{-1} = z - 2\int dz\,(z^2+2)^{-1}$$

$$= z - \frac{2}{\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{z}{\sqrt{2}}).$$

Es ist demnach das gesuchte Integrale $= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{z}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}L(z^2+2) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{z}{\sqrt{2}})$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{z}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}L(z^2+2) - \frac{1}{2}z;$$ nämlich

$$\int x^{-3}\,dx\,(1+2x^2+3x^4)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = \frac{1+x^{-2}}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}L(x^{-4}+2x^{-2}+3) - \frac{x^{-2}+1}{2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc.}\,(\text{tang.}=\frac{1+x^2}{x^2\sqrt{2}})+\text{L}\,(\frac{\sqrt{1+2x^2+3x^4}}{x^2})-\frac{1+x^2}{2x^2}.$$

§. 296.

Es sey V irgend eine Function von v, und das Differentiale V d v arc. (sin. = v) zu integriren; so erhält man, wenn in der Formel

$\int x\,dy = xy - \int y\,dx$ (§. 192.), $x = \text{arc.}\,(\text{sin.} = v)$ und $dy = V\,dv$ gesetzt wird,

$\int V\,dv\,\text{arc.}\,(\text{sin.} = v) =$

$\text{arc.}\,(\text{sin.} = v)\int V\,dv - \int[\int V\,dv \times d.\,\text{arc.}\,(\text{sin.} = v)] =$

$\text{arc.}\,(\text{sin.} = v)\int V\,dv - \int[dv\,(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\int V\,dv]$ (§. 286.).

Vor Allem muß also $\int V\,dv$ gefunden, und dann das Product dieses Integrales mit $dv\,(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}$ integrirt werden können.

Auf ähnlichem Wege findet man die Formeln zur Integrirung solcher Differentialen, wenn der Kreisbogen durch eine andere trigonometrische Linie als den Sinus gegeben ist.

Beyspiel.

$\frac{dx\,\text{arc.}\,(\text{sin.} = \sqrt{x})}{x^2}$ zu integriren. —

Dieses Differentiale ist unter $V\,dv\,\text{arc.}\,(\text{sin.} = v)$ begriffen, und zwar ist $V\,dv = \frac{dx}{x^2} = x^{-2}\,dx$, und $v = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;

also ist $dv = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, $(1-v^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ und $\int V\,dv = -x^{-1}$; folglich

$\int[dv(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\int V\,dv] = \int[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx(1-x)^{-\frac{1}{2}} \times -x^{-1}]$

$= -\frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ (§. 200.); daher

ist $\int \frac{dx\,\text{arc.}\,(\text{sin.} = \sqrt{x})}{x^2} = -\frac{\text{arc.}\,(\text{sin.} = \sqrt{x})}{x} - \int\frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

§. 297.

Wenn eine Differential = Größe das Differentiale eines Kreisbogens und außer diesem noch trigonometrische Linien enthält, welche Functionen dieses Kreisbogens sind, so setze man, um die Differential = Größe zu integriren, eine beliebige dieser trigonometrischen Linien $= x$, und drücke alle vorkommenden trigonometrischen Linien durch x, und auch das Differentiale des Kreisbogens durch x und dx aus (§. 286.). Dadurch erhält man ein Differentiale, welches nur von der veränderlichen Größe x abhängt, und durch dessen Integrirung auch die gegebene Differential = Größe integrirt ist.

Beyspiel.

$\frac{\sin.^3 \varphi \, d\varphi}{\cos.^4 \varphi}$ zu integriren. —

Man setze $\sin. \varphi = x$, so ist $\cos. \varphi = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ und $d\varphi = d \operatorname{arc.} (\sin. = x) = dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 286.); folglich

$$\frac{\sin.^3 \varphi \, d\varphi}{\cos.^4 \varphi} = \frac{x^3 \, dx \, (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1 - x^2)^2} = x^3 \, dx (1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

wozu $\frac{3x^2 - 2}{3(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ als Integrale gehört (§. 199.). Daher ist

$$\int \frac{\sin.^3 \varphi \, d\varphi}{\cos.^4 \varphi} = \frac{3 \sin.^2 \varphi - 2}{3(1 - \sin.^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3 \sin.^2 \varphi - 2}{3 \cos.^3 \varphi} = \frac{1 - 3 \cos.^2 \varphi}{3 \cos.^3 \varphi}.$$

* §. 298.

Durch die Formel $d \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = x) = dx (1 + x^2)^{-1}$ (§. 286.) kömmt man auch auf einen sehr einfachen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ, welcher bey rechtwinkligen Coordinaten $= -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \, d^2 y}$ ist (§. 265.). Bezeichnet nämlich wieder φ den Kreisbogen zwischen den Schenkeln des Winkels,

welchen die Tangente mit der Ordinate macht, so ist $\text{tang}\,\varphi = \frac{dx}{dy}$ (§. 252.), also $\varphi = \text{arc}\,(\text{tang} = \frac{dx}{dy})$.

Daraus folgt nach der angeführten Formel, weil dx als beständig vorausgesetzt ist, $d\varphi = -\frac{dx\,d^2y}{dx^2 + dy^2}$; also ist

$$\varsigma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}$$ (§. 250.).

II. Hauptstück.

Von den krummen Linien in einer Ebene insbesondere.

I. Abschnitt.

Von den Kegelschnitten überhaupt.

---

§. 299.

Fig. 12. LL′ und DD′ seyen zwey unbestimmt lange gerade Linien, welche sich in C unterschiefen Winkeln schneiden.

Die eine von diesen Linien, DD′ drehe sich um die andere LL′, und dabey bleibe die Neigung dieser Linien gegen einander unverändert.

Die von DD′ beschriebene krumme Fläche DdCd′D′, welche also durch den spitzigen Winkel LCD bestimmt ist, hat dann eine solche Beschaffenheit, daß jeder Durchschnitt derselben mit einer auf LL′ senkrechten Ebene, die nicht durch C geht, eine Kreislinie wird, deren Mittelpunct in LL′ liegt.

Diese Fläche ist also diejenige unbegrenzte Fläche, in welcher alle Seiten eines senkrechten Kegels, dessen Achse LL' ist, durch ihre Endpuncte unbestimmt verlängert, liegen.

Man nennt LL' die Achse und C den Mittelpunct dieser unbegrenzten Kegelfläche.

§. 300.

Wird diese Kegelfläche von einer Ebene N'N geschnitten, so heißt die Durchschnittslinie eine Kegelschnittslinie oder ein Kegelschnitt.

§. 301.

Wenn man durch einen beliebigen Punct der Achse, z. B. durch den Mittelpunct eine Senkrechte C S auf NN' zieht, und durch CS und LL' eine Ebene legt, so wird davon die Ebene N'N in einer geraden Linie X'X, die Kegelfläche aber in zwey geraden Linien DD' und dd' geschnitten.

Die Linien CS, X'X, DD' und dd' liegen also in einer Ebene, welche auf N'N senkrecht ist.

Durch CS und den Winkel XAD ist dann die Lage der Durchschnittsebene N'N gegen die Kegelfläche, mithin auch der Kegelschnitt GAH bestimmt.

Allein da CS durch CA und den Winkel CAS = XAD, und die Kegelfläche durch den Winkel LCD bestimmt ist (§. 299.), so ist der Kegelschnitt auch durch CA nebst den beyden Winkeln LCD und XAD bestimmt, und auch die Linie X'X hat eine bestimmte Lage gegen GAH.

§. 302.

Um eine Gleichung für den Kegelschnitt zu erhalten, kann man also X'X als Abscissen-Linie, und A als Anfangspunct annehmen. Zieht man hierauf aus dem beliebigen Puncte M des Kegelschnittes, MP senkrecht auf X'X, so ist für rechtwinklige Coordinaten, AP = x und MP = y.

Durch P ziehe man in der Ebene DCd die gerade Linie QR auf die Achse LL′ senkrecht, und lege durch QR und MP eine Ebene.

Weil die Ebenen N′N und DCd auf einander senkrecht sind (§. 301.), und MP auf dem Durchschnitte X′X dieser Ebenen senkrecht ist, so ist MP, und mithin auch die durch MP und QR gelegte Ebene auf der Ebene DCd senkrecht.

Auf dem Durchschnitte QR dieser beyden Ebenen ist die in der Ebene DCd liegende Linie LL′ senkrecht, also ist LL′ auch auf der Ebene der Linien MP und QR senkrecht; folglich ist der Durchschnitt QMRQ dieser Ebene mit der Kegelfläche eine Kreislinie, und ihr Mittelpunct E liegt in LL′. Durch diesen Punct E geht aber auch QR, mithin ist QR ein Durchmesser des Kreises.

Ferner ist die auf DCd senkrechte Linie MP auch auf QR senkrecht, weil QR in der Ebene DCd liegt; daher hat man $MP^2 = QP.PR$, oder $y^2 = QP.PR$.

Nun sind QP und PR für einen gegebenen Schnitt veränderliche Größen, weil sich mit dem Orte des Punctes M ihre Größe verändert; also kömmt es darauf an, diese veränderlichen Größen durch x und y und durch die beständigen: CA = l, LCD = n nnd XAD = m, welche den Kegelschnitt bestimmen (§. 301.), auszudrücken (§. 225.).

Im Dreyecke QAP verhält sich

$$\sin AQP : AP = \sin PAQ : QP$$
$$= \sin APQ : AQ;$$

allein da $AQP = 90° - LCD = 90° - n$, und $APQ = 180° - (PAQ + AQP) = 180° - (m + 90° - n) = 90° - (m - n)$, so ist $\sin AQP = \cos. n$ und $\sin APQ = \cos.(m - n)$; folglich

$$QP = \frac{AP \sin PAQ}{\sin AQP} = \frac{x \sin. m}{\cos. n}, \text{ und}$$

$$AQ = \frac{AP \sin APQ}{\sin AQP} = \frac{x \cos.(m-n)}{\cos. n}.$$

Ferner ist $EQ = CQ \sin LCD = (CA + AQ) \sin LCD$

$= l \sin. n + x \frac{\sin. n}{\cos. n} \cos. (m-n)$; $PR = QR - QP = 2EQ -$

$QP = 2l \sin. n + 2x \frac{\sin. n}{\cos. n} \cos. (m-n) - \frac{x \sin. m}{\cos. n} = 2l \sin. n$

$+ \frac{x}{\cos. n} [2 \sin. n \cos. (m-n) - \sin. m]$, oder, da $2 \sin. n \cos.$

$(m-n) - \sin. m = 2 \sin. n \cos. m \cos. n + 2 \sin. n \sin. m \sin. n -$

$\sin. m = 2 \sin. n \cos. n \cos. m - \sin. m (1 - 2 \sin.^2 n) = \sin. 2n$

$\cos. m - \sin. m \cos. 2n = \sin. (2n - m)$ ist,

$PR = 2l \sin. n + \frac{x \sin. (2n - m)}{\cos. n}$; folglich wird

$y^2 = \frac{x \sin. m}{\cos. n} [2l \sin. n + \frac{x \sin. (2n - m)}{\cos. n}]$

$= 2l \sin. m \tang. n. x + \frac{\sin. m \sin. (2n - m)}{\cos.^2 n} . x^2.$

Bezeichnet man die beständigen Größen: $2l \sin m \tang n$ mit p und $\frac{\sin. m \sin. (2n-m)}{\cos.^2 n}$ mit q, so erhält man die Gleichung:

$$y^2 = px + qx^2.$$

Jede Kegelschnittslinie ist also eine Linie der zweyten Ordnung (§. 236.).

§. 303.

Aus $y^2 = px + qx^2$ ist $y = + \sqrt{px + qx^2}$ und auch $y = - \sqrt{px + qx^2}$; d. h. zu jeder Abscisse gehören zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen; also halbirt die Abscissen-Linie alle darauf senkrechten Sehnen des Kegelschnittes; sie ist daher eine Achse desselben und A ein Scheitel dieser Achse (§. 229.).

§. 304.

Die Größen: $p = 2l \sin. m \tang. n$ und $q = \frac{\sin. m \sin. (2n-m)}{\cos.^2 n}$ können in besondern Fällen Null werden, und zwar wird p so-

wohl als $q = o$, wenn $m = o$ ist; außer dem wird $p = o$, wenn $l = o$ ist, und q, wenn $m = 2n$ ist.

Ferner, weil $n < 90^\circ$ ist (§. 299.), bleibt p immer positiv, außer es wäre l negativ; q hingegen ist positiv, wenn $m < 2n$, und negativ, wenn $m > 2n$ ist.

§. 305.

Setzt man $m = o$, so verwandelt sich die Gleichung des Schnittes (§. 302.) in $y^2 = o$ und drückt also aus, daß jeder Punct der Abscissen-Linie ein Punct des Kegelschnittes, nämlich ein gemeinschaftlicher Punct der Kegelfläche und der Ebene N'N sey; d. h. wenn $XAD = o$ ist, also X'X mit D'D zusammen fällt, so haben die Kegelfläche und die Ebene N'N nur diese Linie gemein.

Wenn $l = o$ ist, also die Ebene N'N durch den Mittelpunct C der Kegelfläche geht, wo A auf C fällt, so ist $y^2 = qx$ die Gleichung des Schnittes, und daraus $y = \pm x\sqrt{q}$; folglich gehören zu jeder Abscisse, wenn q positiv ist (wozu erfordert wird, daß $m < 2n$ sey (§. 304.)), zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen, und da sowohl $y = +x\sqrt{q}$ als auch $y = -x\sqrt{q}$ die Gleichung einer geraden Linie ist (§. 240.), welche durch den Anfangspunct geht, weil für $x = o$ auch $y = o$ wird; so ist in diesem Falle der Kegelschnitt ein System zweyer geraden Linien, welche sich in C schneiden, und auf entgegen gesetzten Seiten der Abscissen-Linie mit derselben gleiche Winkel machen.

Ist aber nebst l auch $q = o$, nämlich $l = o$ und $m = 2n$ (§. 304.); so ist $y^2 = o$ die Gleichung des Schnittes; also hat die Ebene N'N wieder nur eine gerade Linie (d'd) mit der Kegelfläche gemein; und ist endlich $l = o$ und q negativ, nämlich $m > 2n$ (§. 304.), so wird y für jeden Werth von x unmöglich, außer für $x = o$, wo auch $y = o$ ist; die Ebene N'N hat also nur den Punct C mit der Kegelfläche gemein.

§. 306.

Wenn weder l noch m Null ist, also die Ebene N' N nicht durch C geht, und auch keine Seite der Kegelfläche in ihr liegt, so heißt der Kegelschnitt, eine Parabel, wenn $XAD = DCd$, eine Ellipse, wenn $XAD > DCd$, und eine Hyperbel, wenn $XAD < DCd$ ist.

Im ersten Falle ist $X'X \# d'd$, im zweyten wird $d'd$ von $X'X$ auf der Seite von X und d, und im dritten auf der Seite von X' und d' geschnitten. Die Ebene N' N trifft also in den beyden ersten Fällen nur auf Einer Seite des Mittelpunctes C, im letzten Falle aber auf beyden Seiten desselben mit der Kegelfläche zusammen; daher ist sowohl die Parabel als die Ellipse eine zusammen hängende Linie, die Hyperbel aber besteht aus zwey von einander abgesonderten Linien (§. 227.).

Auch folgt daraus, daß die Achse $X'X$ sowohl bey der Ellipse als auch bey der Hyperbel ausser A noch einen Scheitel, und folglich eine durch die Entfernung dieser beyden Scheitel von einander, bestimmte Größe habe.

§. 307.

Weil für die Parabel $m = 2n$, für die Ellipse $m > 2n$, und für die Hyperbel $m < 2n$ ist, so ist für diese Linien der Ordnung nach q Null, negativ oder positiv (§. 304.); also ist $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel, $y^2 = px + qx^2$ die Gleichung der Ellipse, wenn q negativ, und die der Hyperbel, wenn q positiv ist.

§. 308.

Die Größe $p = 2l \sin. m \tang. n$ (§. 302.) läßt sich durch eine Linie darstellen; denn wenn man in der Ebene DCd, AI durch A auf CD senkrecht zieht, so ist $AI = CA \tang. LCD = l \tang. n$. Zieht man dann durch I, IK senkrecht auf AX, so erhält man ein rechtwinkliges Dreyeck AKI, in welchem der Winkel IAK das Complement von m ist; mithin ist $AK = AI \cos IAK = l \tang. n \sin. m$, folglich $p = 2AK$.

Diese beständige Linie p heißt der Parameter des Kegelschnittes.

§. 309.

Wenn $XAD > DCd$ ist, und also $X'X$ mit $d'd$ auf der Seite von X und d irgendwo in B (Fig. 13.) zusammen trifft, so erhält man ein Dreyeck ACB, in welchem sich $\sin ABC : CA = \sin ACB : AB$, oder, wenn man die Größe AB der Achse $X'X$ (§. 306.) mit a bezeichnet, $\sin.(m - 2n) : l = \sin. 2n : a$ verhält.

Aus dieser Proportion ist $l = \frac{a \sin.(m - 2n)}{\sin. 2n}$; folglich wird

$$p = \frac{2a \sin.(m - 2n) \sin. m \tang. n}{\sin. 2n}$$

$$= \frac{2a \sin.(m - 2n) \sin. m \sin. n}{2 \sin. n \cos^2. n} = \frac{a \sin. m \sin.(m - 2n)}{\cos^2. n}$$

$$= -\frac{a \sin. m \sin.(2n - m)}{\cos^2. n} = -aq \text{ (§. 302.)}; \text{ daher ist für}$$

die Ellipse (§. 306.), $q = -\frac{p}{a}$.

Ist hingegen $XAD < DCd$, in welchem Falle der Durchschnitt B auf die entgegen gesetzte Seite von C fällt (Fig. 14.), so ist im Dreyecke ACB, $ABC = 2n - m$ und $ACB = 180° - 2n$, also verhält sich $\sin.(2n - m) : l = \sin. 2n : a$, und es ist

$l = \frac{a \sin.(2n - m)}{\sin. 2n}$, folglich

$$p = \frac{2a \sin.(2n - m) \sin. m \tang. n}{\sin. 2n} = \frac{a \sin. m \sin.(2n - m)}{\cos^2. n}$$

$= aq$; daher ist für die Hyperbel, $q = \frac{p}{a}$.

Es wird demnach durch Einführung der beständigen Linie a die Gleichung der Ellipse: $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$, und die der Hyperbel: $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$.

§. 310.

Weil $q = \frac{\sin. m \sin. (2n - m)}{\cos^2. n}$ ist (§. 302.), also bloß durch die Winkel m und n bestimmt wird, so kann man untersuchen, ob es für eine gegebene Kegelfläche, also für den gegebenen Winkel n solche Werthe von m gebe, bey welchen q ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Es ist $dq = [\cos. m\, dm \sin.(2n - m) - \sin. m \cos.(2n - m)\, dm] : \cos^2 n = \frac{\sin.(2n - 2m)\, dm}{\cos^2. n}$, also für $\frac{dq}{dm} = 0$, $\sin.(2n - 2m) = 0$, und daher $2n - 2m = k.\ 180°$, nämlich $m = n - k.\ 90°$, wo k jede positive oder negative ganze Zahl, oder auch Null seyn kann.

Nimmt man an, es sey k eine gerade Zahl oder Null, so wird (Fig. 12.) X'X # L'L; setzt man aber für k eine ungerade Zahl, so wird X'X senkrecht auf L'L. Wenn es also äußerste Werthe von q gibt, so ist bey diesen Werthen die Durchschnittsebene N'N entweder zur Achse L'L parallel, oder darauf senkrecht. Die Untersuchung kann also auf die Fälle eingeschränkt werden, in welchen $m = n$, oder $m = 90° + n$ ist.

Da $d^2 q = d \frac{\sin.(2n - 2m)\, dm}{\cos^2. n} = - \frac{2 \cos.(2n - 2m) dm^2}{\cos^2. n}$ ist, so wird für $m = n$, $\frac{d^2 q}{dm^2} = - \frac{2 \cos. 0}{\cos^2. n} = - \frac{2}{\cos^2. n}$; mithin $q = \frac{\sin^2. n}{\cos^2. n} = \tang^2. n$ ein Größtes (§. 171.).

Für $m = 90° + n$ aber wird $\frac{d^2 q}{dm^2} = - \frac{2 \cos.(-180°)}{\cos^2. n} = + \frac{2}{\cos^2. n}$, und $q = \frac{\sin.(90° + n) \sin.(n - 90°)}{\cos^2. n} = - \frac{\cos. n \cos. n}{\cos^2. n} = -1$ ein Kleinstes (§. 171.), nämlich -1 ist der größte aller negativen Werthe von q (§. 172.).

§. 311.

Weil für die Hyperbel, $q = \frac{p}{a}$ ist (§. 309.), so ist bey dieser Linie, p niemals größer als $a \operatorname{tang}^2 n$ (§. 310.).

Bey der Ellipse ist $q = -\frac{p}{a}$ (§. 309.), also $p = a$, wenn $m = 90° + n$ und folglich der Kegelschnitt eine Kreislinie vom Durchmesser a ist.

Es ist also $y^2 = ax - x^2$ die Gleichung der Kreislinie bey rechtwinkligen Coordinaten, wenn die Abscissen auf einem Durchmesser von einem Endpuncte desselben angefangen, genommen werden. Diese Gleichung erhält man auch aus der in §. 226. für die Kreislinie gefundenen, wenn man den Anfangspunct in die Peripherie setzt, und die Größe des Durchmessers mit a bezeichnet.

Mit Ausnahme dieses Falles ist für die Ellipse immer $p < a$ (§. 310.).

§. 312.

Fig. 15. Die Lage eines Punctes F, welcher in der Ebene eines Kegelschnittes AM liegt, sey durch die rechtwinkligen Coordinaten $AU = f$ und $FU = g$ gegeben, und aus F eine gerade Linie FM nach irgend einem Puncte M des Kegelschnittes, dessen Coordinaten $AP = x$ und $MP = y$ sind, gezogen.

Zieht man $FT \# X'X$, so wird FTM ein rechtwinkliges Dreyeck, in welchem $FT = x - f$ und $MT = y - g$ ist; daher ist $FM = \pm\sqrt{(y-g)^2 + (x-f)^2} = \pm\sqrt{y^2 - 2gy + g^2 + (x-f)^2}$.

Allein, da M ein Punct des Kegelschnittes ist, so ist $y^2 = px + qx^2$ (§. 302.), folglich

$$FM = \pm\sqrt{px + qx^2 - 2g\sqrt{px + qx^2} + g^2 + (x-f)^2}.$$

Soll nun FM eine rationale Function von x seyn, so muß vor Allem bey jedem Werthe von x, $2g\sqrt{px + qx^2} = 0$ seyn, welches unmöglich ist, wenn nicht $g = 0$ ist (außer es wäre $p = 0$, welcher Fall hier nicht in Betrachtung gezogen wird.).

Nimmt man $g = o$, also den Punct F in der Abscissen-Linie, so wird

$$FM = \pm\sqrt{px+qx^2+(x-f)^2} = \pm\sqrt{f^2+(p-2f)x+(q+1)x^2};$$

daher wird FM nur dann bey jedem Werthe von x rational, wenn f so eine Größe hat, daß $f^2+(p-2f\,.\,x+(q+1)x^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Dazu ist aber erforderlich, daß das mittlere Glied: $(p-2f)x$ dem doppelten Producte aus f und $\pm x\sqrt{q+1}$ gleich, also $p-2f = \pm 2f\sqrt{q+1}$, folglich

$$f = \frac{p}{2(1\pm\sqrt{q+1})} \text{ sey.}$$

Dieser Werth von f gibt dann

$$FM = \pm(f\pm x\sqrt{q+1}) = \pm\left[\frac{p}{2(1\pm\sqrt{q+1})} \pm x\sqrt{q+1}\right],$$

welches eine rationale Function von x ist.

§. 313.

In der Ebene eines Kegelschnittes gibt es also höchstens nur zwey Puncte, welche die bey F vorausgesetzte Eigenschaft haben, und diese Puncte liegen immer in der bisher angenommenen Abscissen-Linie. Man nennt sie aus optischen Gründen die Brennpuncte des Kegelschnittes, und die gerade Linie aus einem Brennpuncte nach irgend einem Puncte des Kegelschnittes heißt der Leitstrahl, Fahrstrich oder Radius vector dieses Punctes.

§. 314.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung für den Kegelschnitt, $y^2 = px+qx^2$ (§. 302.), $x = f = \frac{p}{2(1\pm\sqrt{q+1})}$, so wird

$$y^2 = \frac{p^2}{2(1\pm\sqrt{q+1})} + \frac{p^2q}{4(1\pm\sqrt{q+1})^2} = p^2\times$$

$$\frac{2(1\pm\sqrt{q+1})+q}{4(1\pm\sqrt{q+1})^2} = \tfrac{1}{4}p^2\times\frac{2\pm2\sqrt{q+1}+q}{1\pm2\sqrt{q+1}+q+1} = \tfrac{1}{4}p^2;$$

es ist also die Ordinate eines jeden Punctes, welche mit der Abscissen-Linie in einem Brennpuncte zusammen trifft, dem halben Parameter gleich; daher ist die Größe der durch einen Brennpunct auf der Abscissen-Linie senkrechten Sehne die Größe des Parameters.

§. 315.

Weil die Schenkel A G und A H (Fig. 12.) eines jeden Kegelschnittes einerley Lage gegen X' X haben, indem X' X eine Achse ist, so kann man sich bey der Untersuchung der Eigenschaften dieser Linien auf Einen Schenkel einschränken, z. B. auf denjenigen, welcher auf der Seite der positiven Ordinaten liegt, und daher bloß $y = + \sqrt{p x + q x^2}$ (§. 303.) setzen.

§. 316.

Durch Differentiiren erhält man aus

$$y = (p x + q x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad d y = \tfrac{1}{2}(p + 2 q x)\, d x\, (p x + q x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{und } d^2 y = -\tfrac{1}{4} p^2\, d x^2\, (p x + q x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{p^2\, d x^2}{4 x^{\frac{3}{2}} (p + q x)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{also } (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = d x \left[1 + \tfrac{1}{4}(p + 2 q x)^2 (p x + q x^2)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= d x \left[(p x + q x^2) + \tfrac{1}{4}(p + 2 q x)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (p x + q x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= d x \left[\tfrac{1}{4} p^2 + (1 + q)(p x + q x^2)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (p x + q x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

* Der für $d^2 y$ gefundene Werth zeigt sogleich an, daß bey keinem bestimmten Werthe von x, $d^2 y = 0$ werden könne, und daß also kein Kegelschnitt einen Wendungspunct habe (§. 260.).

§. 317.

Es ist für jeden Kegelschnitt,

$$\text{Subt.} = \frac{y\, d x}{d y} \text{ (§. 254.)} = \frac{(p x + q x^2)^{\frac{1}{2}}\, d x}{\frac{1}{2}(p + 2 q x)\, d x\, (p x + q x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2 (p x + q x^2)}{p + 2 q x};$$

$$\text{Subnorm} = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{(px + qx^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} \times \tfrac{1}{2}(p + 2qx)\,dx \times (px + qx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(p + 2qx);$$

$$\text{Tang.} = \frac{y}{dv}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{(px+qx^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,[\frac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{1}{2}}(px+qx^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(p+2qx)\,dx\,(px+qx^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2(px+qx^2)^{\frac{1}{2}}\,[\frac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{1}{2}}}{p+2qx};$$

$$\text{Norm.} = \frac{y}{dx}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{(px+qx^2)^{\frac{1}{2}}dx}{dx}\,[\tfrac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{1}{2}}(px+qx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= [\tfrac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

* §. 318.

Aus der allgemeinen Formel für den Krümmungshalbmesser,

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$$ (§. 265.), erhält man für die Kegelschnitte

$$\varrho = -dx^3\,[\tfrac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{3}{2}}(px+qx^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$: -\tfrac{1}{4}p^2\,dx^3\,(px+qx^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{[\frac{1}{4}p^2 + (1+q)(px+qx^2)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}$$

$$= \frac{(\text{Norm.})^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

§. 319.

Aus den Gleichungen: $p = 2l \sin. m \text{ tang. } n$ und $q = \frac{\sin. m \sin. (2n - m)}{\cos.^2 n}$ (§. 302.) lassen sich m und l auf folgende Art finden:

Die letzte Gleichung gibt

$q \cos.^2 n = \sin. m \sin. 2n \cos. m - \sin.^2 m \cos. 2n$

$= \frac{1}{2} \sin. 2m \sin. 2n - \frac{1}{2} \cos. 2n (1 - \cos. 2m)$,

weil $\sin. m \cos. m = \frac{1}{2} \sin. 2m$, und $\sin.^2 m = \frac{1}{2}(1 - \cos. 2m)$ ist; daraus folgt

$2q \cos.^2 n = \sin. 2m \sin. 2n - \cos. 2n + \cos. 2m \cos. 2n$ und

$\cos. 2m \cos. 2n + \sin. 2m \sin. 2n = 2q \cos.^2 n + \cos. 2n$,

nämlich

$\cos. (2m - 2n) = q + (1 + q) \cos. 2n$ (wegen $2 \cos.^2 n = 1 + \cos. 2n$).

Aus q und n kann man nach dieser Formel, $2m - 2n$ berechnen, wodurch m bekannt wird. Dann erhält man aus der ersten Gleichung, $l = \frac{p}{2 \sin. m \tang. n} = \frac{1}{2} p \operatorname{cosec}. m \cot. n$.

Damit aber m möglich sey, darf q keine größere positive Zahl als $\tang.^2 n$, und keine kleinere Zahl, d. h. keine größere negative Zahl als -1 seyn (§. 310.).

Es ist wirklich, wenn man $q = \tang.^2 n + k$ setzt,

$\cos. (2m - 2n) =$

$$\frac{\sin.^2 n}{\cos.^2 n} + k + (1 + \frac{\sin.^2 n}{\cos.^2 n} + k)(2 \cos.^2 n - 1) =$$

$$\frac{\sin.^2 n + k \cos.^2 n + (\cos.^2 n + \sin.^2 n + k \cos.^2 n)(2 \cos.^2 n - 1)}{\cos.^2 n}$$

$= 1 + 2k \cos.^2 n$; mithin wird, wenn k positiv ist, $\cos. (2m - 2n) > 1$, und daher m unmöglich.

Setzt man aber $q = -1 - k$, so wird

$\cos. (2n - 2m) = -1 - k - k \cos. 2n = -1 - k (1 + \cos. 2n)$

$= -1 - 2k \cos.^2 n$, und daher m ebenfalls unmöglich.

§. 320.

Wenn die Gleichung einer Linie für rechtwinklige Coordinaten die Form $y^2 = px + qx^2$ hat, so ist die Linie ein Kegelschnitt, vorausgesetzt, daß, im Falle q eine negative Zahl ist, diese die negative Einheit nicht übersteige.

Ist nämlich q negativ, so kann man den Winkel n, wel-

cher eine Kegelfläche bestimmt (§. 299.), willkürlich annehmen; ist aber q positiv, so kann n immer so angenommen werden, daß tang. n gleich oder größer als $\sqrt{q}$, und mithin q gleich oder kleiner als tang.^{2} n wird.

Es lassen sich daher die Größen m und l finden (§. 319.), welche die Lage einer Ebene gegen die angenommene Kegelfläche bestimmen (§. 301.), und zwar so, daß der Durchschnittslinie dieser Flächen die gegebene Gleichung zugehört (§. 302.).

Auch ist diese Durchschnittslinie eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem q Null, negativ, oder positiv ist (§. 307.), und p ist der Parameter dieser Durchschnittslinie.

Anmerkung.

Was für einer Linie die Gleichung $y^2 = px + qx^2$ zugehöre, wenn q eine negative, die Einheit übersteigende Zahl ist, wird in der Folge untersucht werden.

Aus dem Bisherigen weiß man nur, daß kein Kegelschnitt eine solche Gleichung erhalten könne, wenn die Abscissen auf X′X (Fig. 12.) von A aus genommen werden.

II. Abschnitt.

Von den Kegelschnitten insbesondere.

A. Von der Parabel.

§. 321.

Die Parabel ist vermöge ihrer Gleichung $y^2 = px$ (§. 307.) eine Linie, welche durch eine einzige beständige Größe, nämlich durch den Parameter p bestimmt wird.

Setzt man in dieser Gleichung, $y = o$, so wird $x = o$. Die Achse X′X (Fig. 16.) wird also nur Ein Mal von der Parabel geschnitten; sie hat daher nur Einen Scheitel A.

Für negative Werthe von x wird y unmöglich, für positive aber bleibt y immer möglich, und nimmt mit x zu. Errichtet man durch A eine Senkrechte auf die Achse, so liegt also die Parabel ganz auf derjenigen Seite dieser Senkrechten, auf welcher die Abscissen positiv sind.

Die Parabel besteht daher aus zwey gleichen unbegrenzten Schenkeln A H und A G, welche sich vom Scheitel A aus längst der Abscissen-Linie von derselben immer weiter entfernen.

Wenn x, y die Coordinaten eines, und x', y' die Coordinaten eines andern Punctes der Parabel sind, so ist $y^2 = px$ und $y'^2 = px'$, folglich $y^2 : y'^2 = x : x'$; also nehmen bey dieser Linie die Ordinaten dergestalt zu, daß das Verhältniß ihrer Quadrate dem Verhältnisse der zugehörigen Abscissen beständig gleich bleibt.

Ferner folgt aus der Gleichung $y^2 = px$ die Proportion $x : y : p$, d. h. die Ordinate eines jeden Punctes der Parabel ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der zugehörigen Abscisse und dem Parameter, und der Parameter ist die dritte Proportional-Linie zur Abscisse und zugehörigen Ordinate.

§. 322.

Um die Brennpuncte der Parabel zu finden, setze man in der für f (§. 312.) gefundenen Formel, $q = o$, so wird $f = \frac{p}{2(1 \pm 1)}$, nämlich $f = \frac{1}{4}p$ und $f = \frac{p}{o}$.

Die Parabel hat also nur Einen Brennpunct F im Abstande $AF = \frac{1}{4}p$ vom Scheitel, auf der Seite der positiven Abscissen.

Der Leitstrahl eines jeden Punctes M der Parabel, F M ist $= \frac{1}{4}p + x$ (§. 312.).

§. 323.

Nimmt man auf der Seite der negativen Abscissen in der Achse, $AB = AF = \frac{1}{4}p$, so ist $BP = \frac{1}{4}p + x = FM$ (§. 322.).

Wenn man nun durch B, B D auf X' X senkrecht, und

und durch M, Q R zu X′ X parallel zieht, so ist M Q = B P, also auch M Q = F M.

Die Linie B D heißt die Leitlinie oder die Directrix der Parabel. Die Parabel hat demnach die Eigenschaft, daß jeder Punct in ihr von der Leitlinie eben so weit absteht, als vom Brennpuncte.

§. 324.

G A H sey eine Linie, von welcher jeder Punct M eben so weit von einer geraden Linie B D, als von einem Puncte F außerhalb dieser geraden Linie, entfernt ist; es sey nämlich für jeden Punct M der Linie G A H die auf B D Senkrechte M Q = M F.

Man ziehe X′ X durch F auf B D senkrecht, halbire B F in A, nehme X′ X als Abscissen = Linie, A als Anfangspunct, und die Coordinaten rechtwinklig, so ist die aus M auf X′X Senkrechte M P = y und A P = x.

Da nun $FM = MQ = BP = x + \frac{1}{2}BF$, und $FP = x - \frac{1}{2}BF$ ist, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreyecke F P M, in welchem $MP^2 = FM^2 - FP^2 = (FM + FP) \times (FM - FP)$ ist,

$y^2 = 2x \times BF = 2BF \times x$; mithin ist G A H eine Parabel (§. 320.), deren Parameter = 2 B F, deren Achse X′ X, deren Brennpunct F, und deren Leitlinie B D ist.

Die im vorhergehenden §. angeführte Eigenschaft der Parabel ist also dieser Linie ausschließlich eigen.

§. 325.

Auf diese Eigenschaft gründet sich folgende Methode, Puncte einer Parabel, deren Parameter p gegeben ist, geometrisch zu bestimmen.

Fig. 17. Man ziehe eine gerade Linie X′ X und nehme darinn einen willkürlichen Punct A. Auf der einen Seite dieses Punctes mache man $AF = \frac{1}{4}p$, und auf der andern, $AB = \frac{1}{4}p$.

Durch einen beliebigen Punct P auf A X ziehe man eine Senkrechte auf X′ X, und beschreibe aus F mit einem Radius

$=$BP eine Kreislinie, so schneidet diese die durch P gezogene Senkrechte, weil $FP < BP$ ist, und die Durchschnitte M und m sind Puncte der Parabel; denn vermöge dieser Construction ist die Entfernung der Puncte M und m von BD, $=BP=MF$.

Da der Punct P auf AX beliebig ist, so lassen sich auf diese Art beliebig viele Puncte der Parabel bestimmen.

§. 326.

Um eine Parabel mechanisch zu beschreiben, nehme man auf einer geraden Linie X′X einen Punct A, und mache wie zuvor $AF = AB = \frac{1}{4}p$.

An B lege man ein Lineal in der auf X′X senkrechten Richtung BD, befestige dasselbe, und lege daran einen Winkelhacken mit der einen Kathete SQ, an dessen anderer Kathete in R das Ende eines Fadens oder einer Schnur von der Länge QR dieser Kathete befestiget ist; das andere Ende dieser Schnur mache man in F fest.

Bewegt man nun den Winkelhacken SQR so, daß die Seite QS desselben beständig am Lineale anliegt, und hält während dieser Bewegung die beyden Theile FM und MR der Schnur vermittelst eines an QR anliegenden Stiftes M gerade ausgespannt, so beschreibt der Stift einen Theil der verlangten Parabel; denn weil $FM + MR = QR = QM + MR$, so ist für jeden Ort M des Stiftes, $FM = QM$.

Anmerkung.

Wegen der Dehnbarkeit und der Dicke der Schnur, und auch wegen der Dicke des Stiftes ist diese Construction-Art nicht ganz zuverlässig.

§. 327.

Wenn man in den Formeln (§. 317.) $q = o$ setzt, so erhält man für die Parabel,

Subt. $= 2x$, Subnorm. $= \frac{1}{2}p$, Tang. $= \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{1}{2}}}{p}$

$= 2\sqrt{x(\frac{1}{4}p+x)}$ und Norm. $= (\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p(\frac{1}{4}p+x)}$; nämlich, wenn (Fig. 16.) MT die Tangente und MN die Normale des Punctes M ist, $PT = 2AP$, $PN = \frac{1}{2}p$, $MT^2 = 4AP.FM$ (§. 322.), $MN^2 = p.FM$. Die Subnormale ist also für jeden Punct der Parabel bey dem angenommenen Coordinaten-Systeme beständig.

§. 328.

Aus der Eigenschaft der Parabel, daß Subt. $= 2x$ ist, ergibt sich eine leichte Methode, die Tangente eines jeden Punctes M derselben zu construiren. Macht man nämlich $AT = AP$, so hat man den Durchschnitt T der Tangente mit der Achse, also die Richtung TMt der Tangente.

Da $TF = AF + AT = x + \frac{1}{4}p = FM$ ist, so erhält man den Punct T auch, wenn man $FT = FM$ nimmt, welche Construction noch einfacher ist, weil man dabey nicht nöthig hat, die Ordinate des Punctes M zu ziehen.

§. 329.

Wegen $FT = FM$ ist auch $FMT = FTM$; allein wenn man QR durch M zu X'X parallel zieht, ist $RMt = FTM$, folglich auch $FMT = RMt$; also machen die zur Achse durch den Berührungspunct gezogene Parallele und der Leitstrahl des Berührungspunctes mit der Tangente, und daher auch mit der Normale gleiche Winkel.

* §. 330.

Für den Krümmungshalbmesser bey der Parabel erhält man aus §. 318., $\varrho = \frac{(\frac{1}{4}p^2+px)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{(\frac{1}{4}p+x)}{\frac{1}{4}p}\sqrt{p(\frac{1}{4}p+x)}$; er

ist also für $x = o$ am kleinsten, und $= \frac{1}{2} p$, nimmt mit x beständig zu, und bleibt immer positiv. Die Parabel hat also am Scheitel der Achse ihre größte Krümmung, wird desto flacher, je weiter ihre Theile vom Scheitel abstehen, und bleibt immer gegen die Abscissen-Linie hohl.

* §. 331.

Setzt man nach §. 233., weil der Coordinaten-Winkel $\alpha = 90^\circ$ ist, $x = y' \cos(\beta + \gamma) + x' \cos\gamma + a$, und $y = y' \sin(\beta + \gamma) + x' \sin\gamma + b$, so erhält man aus $y^2 = p\,x$ oder $y^2 - p\,x = o$ durch die Substitution dieser Werthe die Gleichung:

$$y'^2 + \frac{[2(x' \sin\gamma + b)\sin(\beta+\gamma) - p\cos(\beta+\gamma)]}{\sin^2(\beta+\gamma)} y' + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)} x'^2$$

$$+ \frac{(2\,b\sin\gamma - p\cos\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)} x' + \frac{b^2 - a\,p}{\sin^2(\beta+\gamma)} = o$$ für eine Abscissen-Linie, welche mit der Achse einen Winkel $= \gamma$ macht, für einen Coordinaten-Winkel $= \beta$, und für einen Anfangspunct, dessen Coordinaten a und b sind.

Dieser Gleichung zu Folge gehören zu jedem Werthe von x' zwey ungleiche Werthe von y', wenn der Coefficient des zweyten Gliedes nicht Null ist (§. 56.).

Es kann aber dieser Coefficient nicht bey jedem Werthe von x' Null seyn, wenn nicht $x' \sin\gamma = o$, also $\sin\gamma = o$, und folglich die Abscissen-Linie zur Achse parallel ist.

Setzt man $\gamma = o$, so erhält man

$$y'^2 + \frac{(2\,b - p\cot\beta)}{\sin\beta} y' - \frac{p}{\sin^2\beta} x' + \frac{b^2 - a\,p}{\sin^2\beta} = o.$$

Nun kann man immer β so nehmen, daß $\cot\beta = \frac{2\,b}{p}$, und mithin $2\,b - p\cot\beta = o$ wird; dann ist aber $\sin^2\beta = \frac{1}{\mathrm{cosec}^2\beta} = \frac{1}{1 + \cot^2\beta} = \frac{p^2}{p^2 + 4\,b^2}$, folglich wird die Gleichung:

$$y'^2 - \frac{(p + 4\,b^2)}{p} x' + \frac{(p^2 + 4\,b^2)}{p^2}(b^2 - a\,p) = o.$$

Für diesen Coordinaten-Winkel und die zur Achse parallele Abscissen-Linie gehören also zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen; es halbirt also jede zur Achse parallele Linie alle Sehnen, welche mit ihr einen Winkel machen, dessen Cotangente $= \frac{2b}{p}$ ist, und ist daher ein Durchmesser der Parabel (§. 229.).

Da $\cot \beta = \frac{2b}{p}$ ist, so kann $\cot \beta$ nur dann $= 0$, und folglich $\beta = 90°$ seyn, wenn $b = 0$ ist; die Parabel hat also nur Eine Achse, und jede dazu Parallele ist ein Durchmesser; aber außer diesen zur Achse parallelen Durchmessern gibt es keine andern.

* §. 332.

Fig. 18. Wenn man die Coordinaten $AE = a$ und $A'E = b$ des neuen Anfangspunctes so nimmt, daß $b^2 = ap$ wird, so ist der Anfangspunct A' der Abscissen auf dem Durchmesser A'Z ein Punct der Parabel, und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich in $y'^2 - 4(\frac{1}{4}p + a)x' = 0$, oder in $y'^2 = 4(\frac{1}{4}p + a)x' = 4FA'.x'$ (§. 322.).

* §. 333.

Da die Subtangente des Punctes A', $ET = 2AE$ (§. 327.) $= 2a$ ist, so wird $\cot A'TE = \frac{ET}{A'E} = \frac{2a}{b} = \frac{2b^2}{p} : b = \frac{2b}{p} = \cot \beta$ (§. 331.), mithin $A'TE = \beta$; folglich sind die Ordinaten auf dem Durchmesser zur Tangente seines Scheitels parallel.

* §. 334.

Es seyen auf dem Durchmesser A'Z, A'f und Hf die Coordinaten des Punctes H, für welchen die Richtung Hf durch den Brennpunct F geht.

Weil $Ff \# A'T$ (§. 333.) und $A'Z \# X'X$ (§. 331.), so ist $A'f = FT$; aber $FT = FA'$ (§. 328.), also auch $A'f = FA'$, daher $Hf^2 = 4\,FA'$. $A'f$ (§. 332.) $= 4\,FA'^2$, und $Hf = 2\,FA'$, folglich $GH = 4\,FA'$.

Es ist also bey jedem Durchmesser wie bey der Achse (§. 314. u. 322.) die in der Richtung der Ordinaten durch den Brennpunct gezogene Sehne dem vierfachen Abstande des Brennpunctes vom Scheitel gleich.

Dieser Analogie halber, und wegen der Analogie der Gleichungen: $y^2 = px$ und $y'^2 = 4\,FA'$. x' nennt man $4\,FA'$ den Parameter des Durchmessers $A'Z$.

* §. 335.

Bezeichnet man den Parameter des Durchmessers mit p', so hat man

$4\left(\frac{1}{4}p + a\right) = p'$, also $a = \frac{1}{4}(p' - p)$, mithin

$b^2 = ap = \frac{1}{4}p(p' - p)$ und $\cot\beta = \frac{2b}{p} = \sqrt{\frac{p'}{p} - 1}$, woraus $p = \frac{p'}{1 + \cot^2\beta} = \frac{p'}{\mathrm{cosec}^2\beta} = p' \sin^2\beta$ folgt; über dieß verwandelt sich die Gleichung in $y'^2 = p'x'$.

Durch den Parameter p' eines Durchmessers nebst dem Winkel β, unter welchem er die parallelen Sehnen halbirt, ist also der Parameter p der Achse, folglich die Parabel (§. 321.) und die Lage des Durchmessers gegen die Achse bestimmt.

* §. 336.

Aus der Gleichung $y'^2 = p'x'$ läßt sich auf eben dieselbe Art, wie §. 321. folgern, daß jeder Durchmesser mit der Parabel nur Einen Punct gemein habe, daß die Parabel ganz auf Einer Seite der Tangente dieses Punctes liege, daß sich auch auf dem Durchmesser die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen verhalten, und daß der Parameter eines Durchmessers die dritte Proportional-Linie zur Abscisse und Ordinate eines beliebigen Punctes der Parabel sey.

§. 337.

Für jede krumme Linie ist die Länge s eines beliebigen Bogens, zu dessen Endpunct die rechtwinkligen Coordinaten x und y gehören $= \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 250.).

Nun ist für die Parabel, wenn man die Achse als Abscissen-Linie nimmt, $y^2 = px$, folglich $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx$, und $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{1}{4} p x^{-1} dx^2 = x^{-1} dx^2 \cdot (\frac{1}{4} p + x)$; daher $s = \int x^{-\frac{1}{2}} dx (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}} + C$.

Weil das Differentiale $x^{-\frac{1}{2}} dx (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}}$ in $x^m dx (\alpha + \beta x^n)^p$ enthalten, und dabey $\frac{m+1}{n} = (-\frac{1}{2} + 1) : 1 = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{1}{2}$ ist, so läßt sich dasselbe integriren (§. 293. nro. 1.).

Es ist nämlich nach der Formel II, 1. (§. 295.), wenn man $n = 1$, $\beta = 1$ und $\alpha = \frac{1}{4} p$ setzt,

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx (\tfrac{1}{4} p + x)^{-\frac{1}{2}} = 2L (x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{4} p + x}).$$

Nun setze man in der Reductions-Formel A (§. 295.), $\alpha = \frac{1}{4} p$, $\beta = 1$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$ und $p = -\frac{1}{2}$, so ist $m + 1 + n(p+1) = 1$, $n(p+1)\alpha = \frac{1}{8} p$,

$$\text{folglich} \int x^{-\frac{1}{2}} dx (\tfrac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{8} p \int x^{-\frac{1}{2}} dx (\tfrac{1}{4} p + x)^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} p \cdot L (x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{4} p + x});$$

mithin

$$s = \sqrt{x (\tfrac{1}{4} p + x)} + \tfrac{1}{4} p L (\sqrt{x} + \sqrt{\tfrac{1}{4} p + x}) + C.$$

Die Bestimmung von C hängt von der Abscisse des Anfangspunctes, des Bogens s ab. Soll s die Länge des Bogens vom Scheitel der Achse an ausdrücken, so muß $s = o$ seyn, wenn $x = o$ ist, also muß

$o = \frac{1}{4} p L \sqrt{\frac{1}{4} p} + C$, und daher $C = -\frac{1}{4} p L \sqrt{\frac{1}{4} p}$ seyn; mithin ist die Länge eines parabolischen Bogens vom Scheitel der Achse bis zu einem Puncte, dessen Abscisse auf der Achse $= x$ ist,

$$s = \sqrt{x (\tfrac{1}{4} p + x)} + \tfrac{1}{4} p L (\sqrt{x} + \sqrt{\tfrac{1}{4} p + x}) - \tfrac{1}{4} p L \sqrt{\tfrac{1}{4} p}$$
$$= \sqrt{x (\tfrac{1}{4} p + x)} + \tfrac{1}{4} p L \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{\tfrac{1}{4} p + x}}{\sqrt{\tfrac{1}{4} p}}\right).$$

Auf ähnliche Art läßt sich die Länge eines parabolischen Bogens durch die Abscisse auf einem beliebigen Durchmesser genommen, ausdrücken, wenn man die allgemeine Formel für die Bogenlänge bey Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten anwendet.

§. 338.

Um die Größe der Fläche zu erhalten, welche von den rechtwinkligen Coordinaten A P und M P (Fig. 16.) des Punctes M, und dem Bogen A M der Parabel begrenzt wird, setze man in der allgemeinen Formel $V = \int y \, d x + C$ (§. 277.),

$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, so wird V oder $AMP = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} d x + C$

$= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C.$

Da nun $AMP = o$ wird, wenn man $x = o$ setzt, so erhält man $o = C$, mithin

$AMP = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x y.$

Die Fläche A M P ist also zwey Dritteln des Rechteckes gleich, welches die Coordinaten A P und M P des Punctes M als Seiten bestimmen.

§. 339.

Der Formel $W = 2 \pi \int y (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 280.) zu Folge ist die krumme Fläche, welche durch die Umdrehung des parabolischen Bogens A M um die Achse entsteht,

$= 2 \pi \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{1}{2}} d x (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 337.)

$= 2 p^{\frac{1}{2}} \pi \int d x (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{1}{2}} + C$

$= 2 p^{\frac{1}{2}} \pi . \frac{2}{3} (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{3}{2}} + C$ (§. 194.)

$= \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} \pi (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{3}{2}} + C$, und da für $x = o$ auch $W = o$ ist,

$C = -\frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} \pi (\frac{1}{4} p)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} p^2 \pi$, folglich ist

$W = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} \pi (\frac{1}{4} p + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} p^2 \pi$

$= \frac{1}{6} \pi [8 (\frac{1}{4} p + x) \sqrt{p (\frac{1}{4} p + x)} - p^2].$

§. 340.

Der Inhalt K des durch die Umdrehung der Fläche A M P erzeugten paraboliſchen Sphäroides iſt $= \pi \int y^2 \, dx$ (§. 281.) $= \pi \int p x \, dx$ $= \pi \cdot \frac{1}{2} p x^2 = \frac{1}{2} x y^2 \pi$, wobey $C = o$ iſt, weil für $x = o$ auch $K = o$ wird. Dieſes Sphäroid iſt alſo der Hälfte des Cylinders gleich, welchen das Rechteck aus A P und P M bey der Umdrehung um die Achſe beſchreibt.

B. Von der Ellipſe.

§. 341.

Die Gleichung der Ellipſe, $y^2 = p x - \frac{p}{a} x^2$ (§. 309.) zeigt, daß dieſe Linie durch zwey unveränderliche Linien, den Parameter p (§. 308.) und die Achſe a (§. 309.) beſtimmt werde.

Bey negativen Werthen von x iſt $p x - \frac{p}{a} x^2$ negativ, und bey poſitiven Werthen von x, welche größer als a ſind, iſt $\frac{p}{a} x^2 > p x$, mithin $p x - \frac{p x^2}{a}$ ebenfalls negativ, alſo y unmöglich; folglich iſt die Ellipſe ganz zwiſchen den beyden geraden Linien enthalten, welche durch die beyden Scheitel der Achſe (§. 306.) auf derſelben ſenkrecht ſind.

Da $y = o$ wird, ſowohl wenn $x = o$, als auch, wenn $x = a$ geſetzt wird, und immer möglich iſt, wenn man $x < a$ nimmt, ſo muß es wenigſtens Einen Werth von x geben, bey welchem y ein Größtes wird.

Zur Beſtimmung dieſes Werthes ſetze man $\frac{dy}{dx} = o$ (§. 175.), ſo erhält man, weil $dy = d.(p x - \frac{p}{a} x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p \, dx - \frac{2 p x \, dx}{a})$. $(p x - \frac{p x^2}{a})^{-\frac{1}{2}}$ iſt, $\frac{1}{2} p \, (1 - \frac{2x}{a}) : \sqrt{p x - \frac{p}{a} x^2} = o$, und daraus $x = \frac{1}{2} a$, wozu wirklich ein größter Werth von y gehört, weil bey dieſem Werthe von x, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ wird.

Dieser größte Werth von y ist $= \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, also kleiner als $\frac{1}{2}a$, weil $p < a$ ist (§. 311.).

Die Ellipse entfernt sich also vom Scheitel A (Fig. 19.) aus, auf der einen Seite der Achse immer weiter von derselben, bis zum Puncte D, dessen Ordinate DC die Achse AB in C halbirt; dann kömmt sie der Achse wieder näher, bis sie im andern Scheitel B mit derselben wieder zusammen trifft.

Eben dasselbe hat auf der andern Seite der Achse Statt; also ist die Ellipse eine in sich selbst zurück kehrende Linie ADBEA.

§. 342.

Wenn x und y die Coordinaten eines, x' und y' aber die Coordinaten eines andern Punctes der Ellipse sind, so hat man die Gleichungen: $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$, und $y'^2 = px' - \frac{p}{a}x'^2$,

und daraus die Proportion: $y^2 : y'^2 = x(1 - \frac{x}{a}) : x'(1 - \frac{x'}{a})$,

oder $y^2 : y'^2 = x(a - x) : x'(a - x')$; nämlich, wenn $AP = x$, $MP = y$, $Ap = x'$ und $mp = y'$ ist,

$MP^2 : mp^2 = AP \cdot PB : Ap \cdot pB$.

Bey der Ellipse verhalten sich also die Quadrate der Ordinaten wie die Producte aus den Abschnitten der Achse AB.

Es können also die Ordinaten zweyer Puncte M und m auch bey ungleichen Abscissen einander gleich seyn; denn wenn auf entgegen gesetzten Seiten des Punctes C, welcher AB halbirt, $Cp = CP$ ist, so wird $AP = pB$ und $PB = Ap$, folglich $MP = mp$.

Nimmt man diese Ordinaten an einerley Seite der Achse, und zieht die Sehne Mm, so wird pPMm ein Rechteck, und mM von DC senkrecht halbirt.

Werden aber die Ordinaten m'p und MP an entgegen gesetzten Seiten der Achse genommen, und m'C, MC gezogen, so sind die rechtwinkligen Dreyecke Cpm' und CPM congruent, weil $Cp = CP$ und $m'p = MP$ ist, folglich ist $m'C = CM$ und $m'Cp = MCP$, daher m'C mit MC in gerader Linie.

Aus diesen Sätzen folgt, daß von der auf A B durch C senkrechten Linie D E jede darauf senkrechte Sehne, und daß jede durch C gezogene Sehne in diesem Puncte halbirt werde.

Die Ellipse hat also einen Mittelpunct C (§. 229.), und außer der Achse A B noch eine zweyte D E, welche durch den Mittelpunct C auf der ersten senkrecht ist.

§. 343.

Auch die Achse D E hat so wie A B zwey Scheitel D und E in den Abständen $CD = CE = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ von C (§. 341.), also ist ihre dadurch bestimmte Größe $DE = \sqrt{ap}$; folglich $DE < AB$.

Man nennt zur Unterscheidung, A B die große oder die Querachse, und D E die kleine, oder weil sie alle zur Querachse parallelen Sehnen halbirt, die vereinigte Achse (§. 229.).

Diese beyden Achsen theilen die Ellipse in vier congruente Theile.

Bezeichnet man D E mit b, so hat man $b = \sqrt{ap}$, folglich a : b : p; die kleine Achse ist also die mittlere Proportional-Linie zwischen der großen Achse, und dem Parameter, und der Parameter ist die dritte Proportional-Linie zur großen und kleinen Achse.

§. 344.

Nimmt man die Abscissen auf der großen Achse A B vom Mittelpuncte C, und bezeichnet dieselben mit u, so ist für den Punct M, $x = AP = AC + CP = \frac{1}{2}a + u$; folglich verwandelt sich die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$ in

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ap - \frac{p}{a}u^2.$$

Wird aber die kleine Achse D E als Abscissen-Linie, der Mittelpunct C als Anfangspunct angenommen, und die rechtwinkligen Coordinaten mit u' und y' bezeichnet, so ist y = MP

$= CQ = u'$, und $CP = MQ = y'$; folglich $u'^2 = \frac{1}{4} a p - \frac{p}{a} y'^2$, also

$$y'^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a}{p} u'^2.$$

Wenn man auf dieser Abscissen-Linie den Anfangspunct in den Scheitel D setzt, und die Abscisse DQ mit x' bezeichnet, so ist $u' = CQ = DC - DQ = \frac{1}{2}\sqrt{a p} - x'$; mithin

$$y'^2 = a\sqrt{\frac{a}{p}} \cdot x' - \frac{a}{p} x'^2.$$

§. 345.

Wenn man in der letzten Gleichung, $a\sqrt{\frac{a}{p}}$ mit p' und $-\frac{a}{p}$ mit q' bezeichnet, so wird daraus: $y'^2 = p' x' + q' x'^2$.

Wegen $p < a$ (§. 311.) ist q' eine negative, die Einheit übersteigende Zahl, und aus den Werthen: $a\sqrt{\frac{a}{p}} = p'$ und $-\frac{a}{p} = q'$ folgt $a = \frac{p'}{\sqrt{-q'}}$ und $p = \frac{p'}{-q'\sqrt{-q'}}$.

Es läßt sich also immer, wenn die Gleichung einer Linie für rechtwinklige Coordinaten unter der Form $y'^2 = p' x' + q' x'^2$ enthalten, und dabey q' eine negative, die Einheit übersteigende Zahl ist, die große Achse und der Parameter einer Ellipse finden, welcher diese Gleichung zugehört. Eine solche Gleichung bezieht sich auf ein Coordinaten-System, welchem die kleine Achse als Abscissen-Linie, und einer ihrer Scheitel als Anfangspunct zum Grunde liegt.

(Man vergl. die Anm. in §. 320.)

§. 346.

Durch Substitution des Werthes $\frac{b^2}{a}$ für p (§. 343.) wird aus den Gleichungen des §. 344.,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2),$$

$$y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(bx' - x'^2) = \frac{a^2}{b^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - u'^2).$$

§. 347.

Aus der Gleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$ wird, wenn $b = a$ ist, $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $= \frac{1}{2}a$ ist (§. 226.); also ist eine Ellipse, deren Achsen gleich sind, ein Kreis.

§. 348.

Aus dem Dreyecke CPM ist $CM^2 = MP^2 + CP^2 = y^2 + u^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2) + u^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}u^2$; also ist CM desto größer, je größer u ist. Von allen durch den Mittelpunct gezogenen Sehnen ist daher die große Achse die größte, und die kleine Achse die kleinste.

Ferner ist

$$\cos MCP = \frac{CP}{CM} = \frac{u}{CM} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,CM^2}},$$ wenn man für u aus der vorhergehenden Gleichung substituirt. Aus diesem folgt, daß von zwey ungleichen Sehnen, die durch den Mittelpunct gehen, die größere mit der großen Achse einen kleinern spitzigen Winkel mache.

§. 349.

Beschreibt man über AB als Durchmesser einen Kreis, so ist bey einerley Abscisse u vom Mittelpuncte, für den Kreis, $Y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, und für die Ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$, folglich $Y^2 : y^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2} = a^2 : b^2$ und $Y : y = a : b$.

Eben so findet man, daß sich für einerley Abscisse, die Ordinate des über der kleinen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreises zur Ordinate der Ellipse, wie die kleine zur großen Achse verhalte.

§. 350.

Aus der eben angeführten Eigenschaft der Ellipse ergibt sich folgende Methode, beliebig viele Puncte einer Ellipse zu bestimmen, wenn die beyden Achsen gegeben sind.

Man beschreibe über der großen Achse als Durchmesser einen Kreis, ziehe aus beliebigen Puncten der Peripherie senkrechte Linien auf die große Achse, und verkleinere jede von diesen Senkrechten nach dem Verhältnisse der großen zur kleinen Achse, so sind die Endpuncte dieser verkleinerten Senkrechten, Puncte der Ellipse. Wären statt der beyden Achsen die große Achse und der Parameter gegeben, so müßte man zuerst zu diesen Linien die mittlere Proportional-Linie suchen, um die Größe der kleinen Achse zu erhalten (§. 343.).

§. 351.

Für die Bestimmung der Brennpuncte der Ellipse erhält man aus der allgemeinen Formel: $f = \frac{p}{2(1 \pm \sqrt{q+1})}$ (§. 312.), weil bey der Ellipse $q = -\frac{p}{a}$ ist (§. 309.), $f = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a} \pm \sqrt{a-p})}$.

Nun ist bey der Ellipse $p < a$, folglich $\sqrt{a-p}$ möglich, und $\sqrt{a-p} < \sqrt{a}$; die Ellipse hat daher zwey Brennpuncte F und F′ (Fig. 19.) auf der Seite der positiven Abscissen, wenn man A als Anfangspunct nimmt, in den Abständen $AF = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a-p})}$ und $AF' = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a-p})}$.

Es ist $FC = AC - AF = \frac{1}{2}a - \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a-p})}$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \frac{p}{\sqrt{a}+\sqrt{a-p}}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}.\frac{(a+\sqrt{a}\sqrt{a-p}-p)}{\sqrt{a}+\sqrt{a-p}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{a-p}.\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-p})}{\sqrt{a}+\sqrt{a-p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-ap}, \text{ und}$$

$$CF' = AF' - AC = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a-p})} - \tfrac{1}{2}a$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\left(\frac{p}{\sqrt{a}-\sqrt{a-p}} - \sqrt{a}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}.\frac{(p-a+\sqrt{a}\sqrt{a-p})}{\sqrt{a}-\sqrt{a-p}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a}.\frac{[\sqrt{a}\sqrt{a-p}-(a-p)]}{\sqrt{a}-\sqrt{a-p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}.\sqrt{a-p}\ X$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-p})}{\sqrt{a}-\sqrt{a-p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-ap}.$$

Die Brennpuncte der Ellipse sind also gleich weit vom Mittelpuncte, und daher auch von den Scheiteln entfernt.

§. 352.

Man nennt die Entfernung eines Brennpunctes vom Mittelpuncte die Excentricität der Ellipse.

Die Excentricität ist also: $e = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-ap} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ (§. 343.) $= \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2}$.

Wenn man daher aus einem Scheitel D der kleinen Achse mit dem Radius $AC = \tfrac{1}{2}a$ eine Kreislinie beschreibt, so sind die Durchschnittspuncte derselben mit der großen Achse die Brennpuncte.

§. 353.

Wegen der Gleichungen $b = \sqrt{ap}$ (§. 343.), und $e = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-ap}$ (§. 352.) sind durch zwey von den vier Größen: a, b, e und p die beyden übrigen, also immer a und p, und daher die Ellipse bestimmt (§. 341.).

§. 354.

Für die Leitstrahlen erhält man aus §. 312. die Werthe:

$$FM = \frac{p}{2(1+\sqrt{q+1})} + x\sqrt{q+1} = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a-p})} + \frac{x\sqrt{a-p}}{\sqrt{a}},$$

und

$$F'M = \frac{p}{2(1-\sqrt{q+1})} - x\sqrt{q+1} = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a-p})} - \frac{x\sqrt{a-p}}{\sqrt{a}}.$$

Aus der Gleichung $e = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ap}$ (§. 352.) ist $p = \frac{a^2-4e^2}{a}$, und die Substitution dieses Werthes von p gibt

$FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2e}{a}x$, und $F'M = \frac{1}{2}a + e - \frac{2e}{a}x$; also ist

$FM + F'M = a$.

Die Summe der Abstände eines jeden Punctes der Ellipse von den Brennpuncten ist also beständig, und der großen Achse gleich.

Anmerkung.

Von den beyden gleichen und entgegen gesetzten Werthen, welche die allgemeinen Formeln (§. 312.) für die Leitstrahlen geben, wurde nur der positive genommen, weil bloß die Größe, nicht aber die Lage der Leitstrahlen zu bestimmen war.

§. 355.

Wenn bey einer krummen Linie die Summe der Entfernungen FM und F'M eines jeden Punctes M derselben von zwey in ihrer Ebene liegenden Puncten F und F' eine beständige Linie $= a$ ist, so ist $a > FF'$, und wenn man auf den Verlängerun-

gen von FF′, $AF = BF' = \frac{1}{2}(a - FF')$ nimmt, so sind A und B Puncte dieser krummen Linie; denn es ist
$AF + AF' = 2AF + FF' = a - FF' + FF' = a$, und
$BF + BF' = 2BF' + FF' = a - FF' + FF' = a$; die gerade Linie AB durch F und F′ ist also eine Sehne dieser krummen Linie, und $= a$.

Zieht man MP auf AB senkrecht, nimmt AB als Abscissen-Linie, und A als Anfangspunct, so ist für rechtwinklige Coordinaten, $AP = x$ und $MP = y$.

Aus den rechtwinkligen Dreyecken FPM und F′PM ist $FM^2 = FP^2 + PM^2$, und $F'M^2 = F'P^2 + PM^2$, nämlich, wenn man die unveränderliche Linie FF′ mit c bezeichnet,
$FM^2 = (x - AF)^2 + y^2$ und
$(a - FM)^2 = (AF + c - x)^2 + y^2$.

Durch die Subtraction dieser Gleichungen von einander erhält man
$2aFM - a^2 = 2c(x - AF) - c^2$, und daraus

$$FM = \frac{c}{a}x + \frac{1}{2}(a - c), \text{ weil } AF = \frac{1}{2}(a - c) \text{ ist.}$$

Folglich bekömmt man durch Substitution in der Gleichung:
$FM^2 = (x - AF)^2 + y^2$,

$$[\frac{c}{a}x + \frac{1}{2}(a - c)]^2 = [x - \frac{1}{2}(a - c)]^2 + y^2, \text{ und daraus}$$

$$y^2 = [\frac{c}{a}x + \frac{1}{2}(a - c)]^2 - [x - \frac{1}{2}(a - c)]^2$$

$$= (1 + \frac{c}{a})x \times [(a - c) - (1 - \frac{c}{a})x]$$

$$= \frac{(a + c)}{a}x \times [(a - c) - \frac{(a - c)}{a}x]$$

$$= \frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(ax - x^2).$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß die krumme Linie eine Ellipse sey, deren große Achse $= a$, und deren kleine Achse $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ist (§. 346.).

Aus $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ folgt $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; mithin ist $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}FF'$ die Excentricität dieser Ellipse (§. 352.), und es sind daher F und F' die Brennpuncte derselben.

§. 356.

Sollen Puncte einer Ellipse, deren Achsen gegeben sind, geometrisch bestimmt werden, so suche man die Brennpuncte F und F' auf der großen Achse AB (§. 352.), theile AB in zwey beliebige Theile, jedoch so, daß kein Theil kleiner als AF oder BF' wird, nehme diese Theile als Radien, und beschreibe damit aus den Brennpuncten Kreislinien, so sind die Durchschnitte der letztern mit einander, Puncte der Ellipse (§. 355.).

Wäre die große Achse nebst dem Parameter gegeben, so suche man zuerst die kleine Achse (§. 343.), und verfahre dann wie zuvor.

§. 357.

Um eine Ellipse mechanisch zu beschreiben, verbinde man die Enden einer Schnur, deren Länge so groß ist, als die große Achse und die doppelte Excentricität zusammen genommen, lege die Schnur um zwey in den Brennpuncten befestigte Stifte, und spanne dieselbe vermittelst eines andern Stiftes aus.

Bewegt man nun den Stift so, daß die Theile der Schnur immer gerade ausgezogen bleiben, so beschreibt derselbe die verlangte Ellipse, weil für jeden Punct der beschriebenen Linie die Summe der Abstände von den Brennpuncten der gegebenen großen Achse gleich wird.

§. 358.

Aus den allgemeinen Formeln (§. 317.) wird, wenn man $q = -\frac{p}{a}$ setzt, also für die Ellipse (§. 309.),

$$\text{Subt.} = 2\left(px - \frac{p}{a}x^2\right) : \left(p - \frac{2p}{a}x\right) = \frac{2x(a-x)}{a-2x};$$

$$\text{Subnorm.} = \tfrac{1}{2}\left(p - \frac{2p}{a}x\right) = \frac{p}{2a}(a - 2x);$$

$$\text{Tang.} = 2\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{4}p^2 + \frac{(a-p)}{a}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vdots \quad \left(p - \frac{2p}{a}x\right)$$

$$= \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}(a-x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\tfrac{1}{4}a^2p^2 + p(a-p)x(a-x)}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vdots \quad \frac{p}{a}(a - 2x)$$

$$= \frac{2x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-2x)}\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)x(a-x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{a-2x}\sqrt{\frac{x(a-x)}{a}\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)x(a-x)\right]};$$

$$\text{Norm.} = \left[\tfrac{1}{4}p^2 + \frac{(a-p)}{a}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{a}\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)x(a-x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{p\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)x(a-x)\right]}.$$

§. 359.

Die Formel: $\text{Subt.} = \frac{2x(a-x)}{a-2x}$ zeigt an, daß die Subtangente bloß durch die große Achse, und durch die Abscisse des Berührungspunctes bestimmt werde; sie hat also bey allen Ellipsen, deren große Achsen gleich sind, einerley Größe, wenn zu den Berührungspuncten gleiche Abscissen gehören.

Fig. 20. Wenn daher durch einen Punct M einer Ellipse AMB die Tangente gezogen werden soll, so beschreibe man über der großen Achse AB als Durchmesser einen Kreis, ziehe durch M die Linie MP auf AB senkrecht, und durch ihren Durchschnittspunct M′ mit der Kreislinie die Tangente des Kreises.

Durch den gegebenen Berührungspunct M, und durch T, den Durchschnitt der Tangente des Kreises mit der großen Achse ziehe man die gerade Linie TMt, so ist TMt die verlangte Tangente; denn es ist TP die Subtangente des Punctes M' der Kreislinie, also einer Ellipse, welche mit AMB einerley große Achse hat, bey eben derselben Abscisse AP; folglich ist TP auch die Subtangente des Punctes M der Ellipse, und daher TM die Tangente.

§. 360.

Die Eigenschaft der Parabel, daß der Winkel, welchen der Leitstrahl eines Punctes mit der zur Achse durch diesen Punct gezogenen Parallelen macht, von der Normale halbirt wird, läßt eine analoge Eigenschaft bey der Ellipse vermuthen.

Fig. 20. Wenn MN die Normale des Punctes M ist, so ist $NC = PC - PN = \frac{1}{2}a - x - \frac{p}{2a}(a - 2x)$ (§. 358.)

$= \frac{1}{2}(a-p) - \frac{(a-p)}{a}x = \frac{(a-p)}{a}(\frac{1}{2}a - x)$; aus §. 352.

ist aber $a - p = \frac{4e^2}{a}$, folglich

$$NC = \frac{4e^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a - x) = \frac{2e^2}{a} - \frac{4e^2}{a^2}x.$$

Daher ist $FN = FC - NC = e - \frac{2e^2}{a} + \frac{4e^2}{a^2}x$, und

$NF' = F'C + NC = e + \frac{2e^2}{a} - \frac{4e^2}{a^2}x$; mithin verhält sich

$$FN : NF' = 1 - \frac{2e}{a} + \frac{4e}{a^2}x : 1 + \frac{2e}{a} - \frac{4e}{a^2}x$$

$$= \frac{2}{a}(\tfrac{1}{2}a - e + \frac{2e}{a}x) : \frac{2}{a}(\tfrac{1}{2}a + e - \frac{2e}{a}x)$$

$= FM : F'M$ (§. 354.).

Wegen dieser Proportion ist $FMN = NMF'$; also halbirt bey der Ellipse die Normale den Winkel der beyden Leitstrahlen, und mithin die Tangente dessen Nebenwinkel.

Man kann daher auch dadurch die Tangente eines Punctes der Ellipse ziehen, daß man den Winkel halbirt, welchen ein Leitstrahl mit der Verlängerung des andern macht.

* §. 361.

Für die Ellipse wird der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{(\text{Norm})^3}{(\frac{1}{2}p)^2}$

(§. 318.)

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{p^3\,[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)\,x\,(a-x)]^3} : \tfrac{1}{4}p^2 \text{ (§. 358.)}$$

$$= \frac{4}{a^3p}\sqrt{p\,[\tfrac{1}{4}a^2p + (a-p)\,x\,(a-x)]^3}.$$

Diese Formel zeigt, daß der Krümmungshalbmesser mit dem Producte $x(a-x)$ zugleich größer oder kleiner werde. Er ist also für $x = o$ und für $x = a$ am kleinsten und $= \frac{1}{2}p$; für $x = \frac{1}{2}a$ aber am größten und $= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{a^2}{2b}$ (§. 343.).

Die Ellipse ist also an den Scheiteln der großen Achse am stärksten gekrümmt, sie wird gegen die Scheitel der kleinen Achse hin beständig flacher, und hat an denselben die kleinste Krümmung.

* §. 362.

Die beyden Achsen der Ellipse sind zwey Durchmesser, welche durch den Mittelpunct gehen; man kann nun untersuchen, ob die Ellipse außer diesen nicht noch andere Durchmesser habe.

Wenn eine gerade Linie in der Ebene der Ellipse ein Durchmesser derselben ist, so halbirt sie alle in einer gewissen Richtung gezogenen, unter sich parallelen Sehnen, folglich auch diejenige, welche durch den Mittelpunct geht. Da aber diese im Mittelpuncte selbst halbirt ist (§. 342.), so folgt daraus, daß eine gerade Linie, die nicht durch den Mittelpunct geht, kein Durchmesser seyn könne.

Es bleibt also nur noch zu untersuchen, welche von den Li-

nien, die durch den Mittelpunct gehen, Durchmesser der Ellipse seyen.

Fig. 21. Man ziehe zu diesem Zwecke $A'B'$ durch den Mittelpunct C unter dem beliebigen Winkel $B'CB = \gamma$ mit der großen Achse AB, nehme $A'B'$ als Abscissen-Linie, C als Anfangspunct, bezeichne die Coordinaten CP und MP eines willkührlichen Punctes M der Ellipse mit v und w, und den ebenfalls beliebig angenommenen Coordinaten-Winkel MPB' mit β, so erhält man aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$, oder $a^2y^2 + b^2u^2 - \frac{1}{4}a^2b^2 = 0$ (§. 346.) eine Gleichung zwischen w und v, wenn man in den Formeln (§. 233.), $x = u$, $x' = v$, $y' = w$, $a = o$, $b = o$ und $\alpha = 90°$ setzt, und für u und y substituirt.

Es wird

$u = w \cos(\beta + \gamma) + v \cos\gamma$,

$y = w \sin(\beta + \gamma) + v \sin\gamma$, mithin

$u^2 = w^2 \cos^2(\beta+\gamma) + 2vw \cos\gamma \cos(\beta+\gamma) + v^2\cos^2\gamma$,

$y^2 = w^2 \sin^2(\beta+\gamma) + 2vw \sin\gamma \sin(\beta+\gamma) + v^2\sin^2\gamma$,

und also

$$\left.\begin{matrix} a^2\sin^2(\beta+\gamma) \\ +b^2\cos^2(\beta+\gamma) \end{matrix}\right\} w^2 + \left.\begin{matrix} 2a^2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) \\ +2b^2\cos\gamma\cos(\beta+\gamma) \end{matrix}\right\} vw + \left.\begin{matrix} a^2\sin^2\gamma \\ +b^2\cos^2\gamma \end{matrix}\right\} v^2$$
$$- \tfrac{1}{4}a^2b^2 = o.$$

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß nur dann zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzten Richtungen gehören, wenn das Glied fehlt, welches vw enthält, also wenn $a^2 \sin\gamma \sin(\beta+\gamma) + b^2\cos\gamma\cos(\beta+\gamma) = o$, und mithin $\text{tang}\,\gamma\,\text{tang}\,(\beta+\gamma) = -\frac{b^2}{a^2}$ ist.

Nimmt man β so, daß $\text{tang.}(\beta+\gamma) = -\frac{b^2}{a^2\,\text{tang.}\,\gamma}$ wird, so ist $a^2\sin.^2(\beta+\gamma) + b^2\cos.^2(\beta+\gamma) =$

$$\frac{a^2\,\text{tang.}^2(\beta+\gamma)}{1+\text{tang.}^2(\beta+\gamma)} + \frac{b^2}{1+\text{tang.}^2(\beta+\gamma)} = \left(\frac{b^4}{a^2\text{tang.}^2\gamma} + b^2\right)$$

$$: \left(1 + \frac{b^4}{a^4 \text{ tang.}^2 \gamma}\right) = \frac{a^2 b^4 + a^4 b^2 \text{ tang.}^2 \gamma}{a^4 \text{ tang.}^2 \gamma + b^4}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (a^2 \text{ sin.}^2 \gamma + b^2 \text{ cos.}^2 \gamma)}{a^4 \text{ sin.}^2 \gamma + b^4 \text{ cos.}^2 \gamma}$$; daher verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{a^2 b^2 (a^2 \text{ sin.}^2 \gamma + b^2 \text{ cos.}^2 \gamma)}{a^4 \text{ sin.}^2 \gamma + b^4 \text{ cos.}^2 \gamma} w^2 + (a^2 \text{sin.}^2 \gamma + b^2 \text{ cos.}^2 \gamma) v^2 - \tfrac{1}{4} a^2 b^2 = 0.$$

* §. 363.

Aus der Gleichung $\text{tang.}(\beta + \gamma) = -\frac{b^2}{a^2 \text{ tang. } \gamma}$ erkennt man, daß β immer möglich wird, was für einen Werth man auch für γ nehmen mag; also gibt es für jede gerade Linie, die durch den Mittelpunct geht, parallele Sehnen, welche von ihr halbirt werden; daher ist jede gerade Linie durch den Mittelpunct ein Durchmesser der Ellipse.

Setzt man statt $\text{tang.}(\beta + \gamma)$ den Werth $\frac{\text{tang. } \beta + \text{tang. } \gamma}{1 - \text{tang. } \beta \text{ tang. } \gamma}$, so bekömmt man

$$\text{tang. } \beta = -\frac{a^2 \text{ tang. } \gamma + b^2 \text{ cot. } \gamma}{a^2 - b^2}.$$

Dieser Formel zu Folge gibt jeder Werth von γ nur Einen Werth von β, und β wird nur dann $= 90°$, wenn entweder $\gamma = 0$, oder $\gamma = 90°$ ist; außer dem wird β stumpf, wenn γ spitzig ist, und β spitzig, wenn γ stumpf ist. Die Ellipse hat also außer den beyden schon gefundenen Achsen keine andern.

* §. 364.

Wenn man $w = 0$ setzt, so erhält man (§. 362.)

$$v = \pm \frac{\frac{1}{2} a b}{\sqrt{a^2 \text{ sin.}^2 \gamma + b^2 \text{ cos}^2 \gamma}}$$; folglich ist die Länge des Durchmessers $A'B' = \frac{a b}{\sqrt{a^2 \text{ sin.}^2 \gamma + b^2 \text{ cos.}^2 \gamma}}$

Für $v = o$ wird hingegen

$w = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4 \sin.^2 \gamma + b^4 \cos.^2 \gamma}{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}}$; also ist die Größe der unter dem Coordinaten-Winkel $D'CB' = \beta$ gegen $A'B'$ durch C gezogenen Sehne, oder des Durchmessers (§. 363.)

$$D'E' = \sqrt{\frac{a^4 \sin.^2 \gamma + b^4 \cos.^2 \gamma}{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}}.$$

* §. 365.

Werden die Größen der Durchmesser $A'B'$ und $D'E'$ mit a' und b' bezeichnet, so hat man also

$$a' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}} \text{ und } b' = \sqrt{\frac{a^4 \sin.^2 \gamma + b^4 \cos.^2 \gamma}{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}};$$

woraus $a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma = \frac{a^2 b^2}{a'^2}$, und

$\frac{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}{a^4 \sin.^2 \gamma + b^4 \cos.^2 \gamma} = \frac{1}{b'^2}$ folgt.

Die Gleichung (§. 362.) verwandelt sich demnach in

$\frac{a^2 b^2}{b'^2} w^2 + \frac{a^2 b^2}{a'^2} v^2 - \frac{1}{4} a^2 b^2 = o$, oder in

$w^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (\frac{1}{4} a'^2 - v^2)$.

* §. 366.

Nimmt man $D'E'$ als Abscissen-Linie, C als Anfangspunct, und die Ordinaten zu $A'B'$ parallel, so ist, wenn man die Coordinaten des Punctes M, CP' mit v' und MP' mit w' bezeichnet, $w = v'$ und $v = w'$; daher verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$v'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (\frac{1}{4} a'^2 - w'^2)$, oder in

$w'^2 = \frac{a'^2}{b'^2} (\frac{1}{4} b'^2 - v'^2)$.

Der Durchmesser $D'E'$ halbirt also alle zu $A'B'$ paralle-

len Sehnen, so wie von A′B′ alle zu D′E′ parallelen Sehnen halbirt werden; mithin sind A′B′ und D′E′ vereinigte Durchmesser (§. 229.).

* §. 367.

Wird B′ als Anfangspunct der Abscissen genommen, so bekömmt man aus $w^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\frac{1}{4}a'^2 - v^2)$, zwischen B′P = t und MP = w die Gleichung: $w^2 = \frac{b'^2}{a'}t - \frac{b'^2}{a'^2}t^2$, weil $v = \frac{1}{2}a' - t$ ist.

Eben so findet man zwischen D′P′ = t′ vom Anfangspuncte D′ genommen, und M′P′ = w′, aus $w'^2 = \frac{a'^2}{b'^2}(\frac{1}{4}b'^2 - v'^2)$ die Gleichung: $w'^2 = \frac{a'^2}{b'}t' - \frac{a'^2}{b'^2}t'^2$; denn es ist $v' = \frac{1}{2}b' - t'$.

Wenn man die dritte Proportional-Linie zu a′ und b′ mit p′, und die dritte Proportional-Linie zu b′ und a′ mit p″ bezeichnet, so werden aus den beyden vorhergehenden Gleichungen folgende:

$$w^2 = p't - \frac{p'}{a'}t^2, \text{ und } w'^2 = p''t' - \frac{p''}{b'}t'^2.$$

Wegen der Analogie dieser Gleichungen mit $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$, welche anfangs für die Ellipse gefunden wurde (§. 309.), und weil die Linien p′ und p″ eben so wie p (§. 343.) zur Sehne, auf welcher die Abscissen genommen sind, und zur Sehne, welche durch den Mittelpunct den Ordinaten parallel ist, die dritten Proportional-Linien sind, heißt $p' = \frac{b'^2}{a'}$ der Parameter des Durchmessers a′, und $p'' = \frac{a'^2}{b'}$ der Parameter des Durchmessers b′.

Aus den eben angegebenen Werthen von p′ und p″ folgt $p'p'' = a'b'$, d. h. das Product der Parameter zweyer vereinigten Durchmesser ist dem Producte dieser Durchmesser gleich,

und daher sind zwey vereinigte Durchmesser mit ihren Parametern umgekehrt in Proportion.

* §. 368.

Wenn man B C B′ oder $\gamma = 0$ setzt, so wird B′ C D′ oder $\beta = 90°$ (§. 363.); also fällt D′ E′ mit der Richtung der kleinen Achse zusammen, wenn A′B′ die Richtung der großen Achse ist. In diesem Falle ist also $p'' = \frac{a^2}{b}$ nach der vorhergehenden Benennung der Parameter der kleinen Achse.

* §. 369.

Aus zwey vereinigten Durchmessern a′ und b′ einer Ellipse nebst ihrem Conjugations-Winkel β (§. 229.) lassen sich beliebig viele Puncte dieser Ellipse auf folgende Art finden:

Man construire nach einer von den angegebenen Methoden eine Ellipse, deren Achsen a′ und b′ sind; ziehe aus beliebigen Puncten dieser Ellipse senkrechte Linien auf die eine Achse a′, und verändere die Richtung dieser Senkrechten mit Beybehaltung ihrer Länge so, daß jede derselben mit a′ einen Winkel $= \beta$ macht, so liegen ihre Endpuncte in der verlangten Ellipse; denn zur Linie, die durch diese Endpuncte geht, gehört für Abscissen vom Mittelpuncte auf a′, die Gleichung: $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\frac{1}{4}a'^2 - x^2)$ bey einem Coordinaten-Winkel $= \beta$.

* §. 370.

Um die Lage der Tangente A′T gegen einen Durchmesser zu finden, durch dessen Scheitel A′ dieselbe gezogen ist, ziehe man A′H senkrecht auf die große Achse A B; so ist $HA'C = 90° - \gamma$, und es kömmt nur noch darauf an, den Winkel T A′ H zu finden.

Nach §. 358. ist die Subtangente des Punctes A′,

$$TH = \frac{2AH(a - AH)}{a - 2AH} = \frac{aAH - AH^2}{\frac{1}{2}a - AH} = \frac{a^2 A'H^2}{b^2 CH},$$

weil $\frac{b^2}{a^2}(a\,AH - AH^2) = A'H^2$ ist (§. 346.); mithin ist

$$\text{tang. } T\,A'\,H = \frac{TH}{A'H} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{A'H}{CH} = \frac{a^2}{b^2} \text{ tang. } \gamma.$$

Man erhält also

$$\text{tang. } TA'C = \text{tang. } (TA'H + HA'C) = \frac{\text{tang. } TA'H + \text{tang. } HA'C}{1 - \text{tang } TA'H \text{ . tang } HA'C}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b^2} \text{ tang. } \gamma + \text{cot. } \gamma\right) : \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \text{ tang. } \gamma \text{ cot. } \gamma\right)$$

$$= \frac{a^2 \text{ tang. } \gamma + b^2 \text{ cot. } \gamma}{b^2 - a^2} = -\frac{a^2 \text{ tang. } \gamma + b^2 \text{ cot. } \gamma}{a^2 - b^2}$$

= tang. β (§. 363.), und daher $T\,A'\,C = \beta = MPB'$.

Die Tangente des Scheitels eines Durchmessers ist also zu den Sehnen, welche von diesem Durchmesser halbirt werden, und daher auch zum vereinigten Durchmesser parallel.

Man findet daher aus der gegebenen Lage eines Durchmessers die des vereinigten, wenn man durch einen Scheitel des erstern die Tangente, und zu dieser durch den Mittelpunct eine Parallele zieht.

* §. 371.

Die Werthe, welche §. 365. für a′ und b′ gefunden wurden, geben

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 b^2 + a^4 \sin.^2 \gamma + b^4 \cos.^2 \gamma}{a^2 \sin.^2 \gamma + b^2 \cos.^2 \gamma}$$

$$= \frac{(a^4 - b^4) \sin.^2 \gamma + a^2 b^2 + b^4}{(a^2 - b^2) \sin.^2 \gamma + b^2}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \sin.^2 \gamma + b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2) \sin.^2 \gamma + b^2}$$

$$= a^2 + b^2.$$

Die Summe der Quadrate zweyer vereinigten Durchmesser ist also der Summe der Quadrate der beyden Achsen gleich, und mithin eine beständige Größe.

* §. 372.

Wenn man a' mit b' multiplicirt, so erhält man

$$a'b' = ab \times \frac{\sqrt{a^4 \sin.^2\gamma + b^2 \cos.^2\gamma}}{a^2 \sin.^2\gamma + b^2 \cos.^2\gamma}.$$

Da $\text{tang}\,\beta = -\frac{a^2 \text{tang}\,\gamma + b^2 \cot\gamma}{a^2 - b^2}$ (§. 363.), so wird, wenn man tang γ und cot γ durch sin γ und cos γ ausdrückt,

$$\cot\beta = -\frac{(a^2 - b^2)\sin\gamma\cos\gamma}{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma} \text{ und}$$

$$\text{cosec}\,\beta = \sqrt{1 + \cot^2\beta} = \frac{\sqrt{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}}{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma}.$$

Daher ist auch

$a'b' = ab\,\text{cosec}\,\beta$, und mithin $a'b'\sin\beta = ab$; d. h. das Product zweyer vereinigten Durchmesser mit dem Sinus des Conjugations-Winkels multiplicirt, ist dem Producte der beyden Achsen gleich, und daher ebenfalls beständig.

Das Parallelogramm, welches die Tangenten der Scheitel zweyer vereinigten Durchmesser bestimmen, ist also dem Rechtecke gleich, welches man erhält, wenn man durch die Scheitel der beyden Achsen Tangenten zieht.

* §. 373.

Durch die Gleichungen:

$$\text{tang}\,\beta = -\frac{a^2\,\text{tang}\,\gamma + b^2\cot\gamma}{a^2 - b^2} \text{ (§. 363.)},$$

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \text{ (§. 371.) und}$$

$$a'b'\sin\beta = ab \text{ (§. 372.)}$$

sind von den Größen: a, b, a', b', β und γ drey bestimmt, wenn die drey übrigen gegeben sind, und diese Gleichungen sind zur Auflösung aller Aufgaben hinreichend, welche in Beziehung auf die Lage und Größe vereinigter Durchmesser vorkommen können.

Aus der ersten Gleichung ist

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{-(a^2 - b^2)\,\text{tang}\,\beta \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2\,\text{tang}^2\beta - 4a^2b^2}}{2a^2},$$

wodurch man für γ zwey Werthe erhält, nämlich den Winkel, welchen der eine, und auch den Winkel, welchen der andere von den vereinigten Durchmessern mit der großen Achse macht.

§. 374.

Wenn man in dem, §. 316. für $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ gefundenen Werthe, $q = -\frac{p}{a}$ setzt, so bekömmt man für die Länge des elliptischen Bogens (§. 250.) die Formel

$$s = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}} [\tfrac{1}{4} a^2 p + a(a-p)x - (a-p)x^2]^{\frac{1}{2}}$$

+ Const, welches Integrale aber nur durch eine Reihe angegeben werden kann.

§. 375.

Da bey rechtwinkligen Coordinaten überhaupt $V = \int y\,dx + C$ ist (§. 277.), so ist der Theil der elliptischen Fläche, A P M A (Fig. 19.) =

$$\int (px - \frac{p}{a} x^2)^{\frac{1}{2}} dx + C = \sqrt{\frac{p}{a}} \int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Das angezeigte Integrale läßt sich wegen §. 293. nro. 1. finden; es ist nämlich aus §. 295. II, 3; $\int x^{-\frac{1}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}})$, und man findet daraus vermittelst der Reductions-Formel A,

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + a \operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}}).$$

Aus diesem Integrale erhält man hierauf durch die Reductions-Formel C,

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} a x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}})$$

$$= \tfrac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} (a - x)^{\frac{1}{2}} [a - 2(a-x)] + \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}(a - 2x) x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}}\right).$$

Daher ist APMA =

$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}}\left[-(a-2x)\sqrt{x(a-x)} + a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{a}}\right)\right]$; denn es ist $C = 0$, weil für $x = 0$ auch APMA $= 0$ wird.

Setzt man $x = a$, so ist die Größe der halben elliptischen

Fläche $= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}} \times a^2 \operatorname{arc}(\sin = 1) = \frac{1}{4} a\sqrt{ap} \times \frac{1}{2}\pi =$

$\frac{1}{8} a\pi\sqrt{ap}$; folglich ist die ganze elliptische Fläche $= \frac{1}{4} a\pi\sqrt{ap}$ $= \frac{1}{4} ab\pi$ (§. 343.).

Die elliptische Fläche ist also einem Kreise gleich, dessen Durchmesser die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen den beyden Achsen ist.

§. 376.

Die Oberfläche eines Sphäroides ist allgemein: $W = 2\pi \int y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 280.).

Nimmt man die Abscissen (x) vom Mittelpuncte der Ellipse auf der großen Achse, so ist $y = \frac{b}{a} (\frac{1}{4} a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 346.), also

$$dy = -\frac{b}{a} x\, dx (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad dy^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 dx^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2)^{-1},$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 \left[1 + \frac{b^2}{a^2} x^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2)^{-1}\right]$$

$$= \frac{dx^2}{a^2} \left[a^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2) + b^2 x^2\right] (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2)^{-1}$$

$$= \frac{dx^2}{a^2} \left[\tfrac{1}{4} a^4 - (a^2 - b^2) x^2\right] (\tfrac{1}{4} a^2 - x^2)^{-1},$$

mithin

$$W = 2\pi \int \frac{b}{a} (\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{a} [\tfrac{1}{4}a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ C = \frac{2b\pi}{a^2} \int dx [\tfrac{1}{4}a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{1}{2}} + C,$$ oder weil $a^2 - b^2 = 4e^2$ ist (§. 352.),

$$W = \frac{2b\pi}{a^2} \int dx (\tfrac{1}{4}a^4 - 4e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{b\pi}{a^2} \int dx (a^4 - 16 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Nun ist nach II, 3. (§. 295.)

$$\int dx (a^4 - 16 e^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4e} \text{ arc } (\sin = \frac{4ex}{a^2}),$$ und daraus nach der Reductions-Formel A,

$$\int dx (a^4 - 16 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} x (a^4 - 16 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{a^4}{8e} \text{ arc } (\sin = \frac{4ex}{a^2}); \text{ daher ist}$$

$$W = \frac{b\pi}{a^2} [\tfrac{1}{2} x (a^4 - 16 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^4}{8e} \text{ arc } (\sin = \frac{4ex}{a^2})] + C.$$

Soll $W = o$ seyn, wenn $x = o$ ist, und wenn daher die Oberfläche von der Kreislinie an gerechnet wird, welche der Endpunct der kleinen Achse bey der Umdrehung beschreibt, so ist $C = o$.

Setzt man $x = \frac{1}{2} a$, so wird W die vom Bogen DMB (Fig. 19.) beschriebene Fläche

$$= \frac{b\pi}{a^2} [\tfrac{1}{4} a^2 (a^2 - 4e^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^4}{8e} \text{ arc } (\sin = \frac{2e}{a})]$$

$$= \tfrac{1}{4} b\pi [b + \frac{a^2}{2e} \text{ arc } (\sin = \frac{2e}{a})]$$; daher ist die Fläche, welche der Bogen ADB beschreibt,

$$= \tfrac{1}{2} b\pi [b + \frac{a^2}{2e} \text{ arc } (\sin = \frac{2e}{a})].$$

§. 377.

Nimmt man an, die halbe Ellipse drehe sich um die kleine Achse, so ist zur Bestimmung von W, $y = \frac{a}{b} (\tfrac{1}{4} b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

wenn die Abscissen auf der kleinen Achse vom Mittelpuncte aus mit x bezeichnet werden (§. 346.), und man findet

$$W = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\left[\tfrac{1}{4}b^2 + (a^2 - b^2)x^2\right]^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{a\pi}{b^2}\int dx\,(b^4 + 16\,e^2x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Nach II, 1. (§. 295.) ist

$$\int dx\,(b^4 + 16\,e^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4e}L\left(4ex + \sqrt{b^4 + 16\,e^2x^2}\right),$$

und aus diesem Integrale folgt wieder vermittelst der Reductions-Formel A,

$$\int dx\,(b^4 + 16\,e^2x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{b^4 + 16\,e^2x^2} + \frac{b^4}{8e}L\left(4ex + \sqrt{b^4 + 16\,e^2x^2}\right);$$

mithin ist

$$W = \frac{a\pi}{2b^2}\left[x\sqrt{b^4 + 16e^2x^2} + \frac{b^4}{4e}L\left(4ex + \sqrt{b^4 + 16e^2x^2}\right)\right] + C.$$

Wird W so bestimmt, daß für $x = o$ auch $W = o$ wird, so erhält man

$$o = \frac{a\pi}{2b^2} \times \frac{b^4}{4e}Lb^2 + C, \text{ also } C = -\frac{a\pi}{2b^2} \times \frac{b^4}{4e}Lb^2, \text{ und}$$

daher

$$W = \frac{a\pi}{2b^2}\left[x\sqrt{b^4 + 16e^2x^2} + \frac{b^4}{4e}L\left(\frac{4ex + \sqrt{b^4 + 16e^2x^2}}{b^2}\right)\right].$$

Für $x = \frac{1}{2}b$ erhält man für die Größe der Fläche, welche der Bogen B M D (Fig. 19.) bey der Umdrehung um D E beschreibt, die Formel

$$\frac{a\pi}{2b^2}\left[\tfrac{1}{2}b^2\sqrt{b^2 + 4e^2} + \frac{b^4}{4e}L\left(\frac{2be + b\sqrt{b^2 + 4e^2}}{b^2}\right)\right]$$

$$= \frac{a\pi}{2b^2}\left[\tfrac{1}{2}ab^2 + \frac{b^4}{4e}L\left(\frac{2e + a}{b}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}a\pi\left[a + \frac{b^2}{2e}L\left(\frac{a + 2e}{b}\right)\right]; \text{ daher ist die von D B E beschrie-}$$

bene Fläche $= \frac{1}{2}a\pi\left[a + \frac{b^2}{2e}L\left(\frac{a + 2e}{b}\right)\right]$.

§. 378.

Substituirt man aus der Gleichung der Ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, wobey die Abscissen vom Mittelpuncte auf der großen Achse genommen sind (§. 346.), den Werth von y^2 in der Formel: $K = \pi \int y^2 \, dx + C$ (§. 281.); so erhält man für das Sphäroid, welches durch die Umdrehung der halben elliptischen Fläche um die große Achse entsteht,

$$K = \frac{b^2 \pi}{a^2} \int (\tfrac{1}{4}a^2 \, dx - x^2 \, dx) + C = \frac{b^2 x \pi}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{3}x^2) + C.$$

Bestimmt man K so, daß für $x = o$ auch $K = o$ wird, so ist C ebenfalls $= o$; mithin

$K = \frac{b^2 x \pi}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}x^2)$ = dem Inhalte desjenigen Theiles des Sphäroides, welcher zwischen den beyden Kreisen liegt, die bey der Umdrehung von den Ordinaten beschrieben werden, deren Abscissen $= o$ und $= x$ sind.

Für $x = \frac{1}{2}a$ wird $K = \frac{1}{12}a\,b^2\,\pi$, der Inhalt des von der Fläche DCBMD (Fig. 19.) beschriebenen Körpers, und daher $\frac{1}{6}a\,b^2\,\pi$ die Größe desjenigen, welchen ABDA beschreibt.

§. 379.

Weil $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(\frac{1}{4}b^2 - x^2)$ die Gleichung der Ellipse ist, wenn die Abscissen auf der kleinen Achse vom Mittelpuncte aus mit x bezeichnet werden (§. 346.), so ist für das Sphäroid, welches durch die Umdrehung der halben elliptischen Fläche um die kleine Achse beschrieben wird,

$K = \frac{a^2 x \pi}{b^2}(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{3}x^2)$, und der Inhalt dieses ganzen Sphäroides $= \frac{1}{6}a^2\,b\,\pi$.

Es mag demnach a die große und b die kleine, oder a die kleine und b die große Achse einer Ellipse bezeichnen, so ist immer, wenn die Umdrehung um a geschieht, und die Abscissen

vom Mittelpuncte genommen werden, $K = \frac{b^2 x \pi}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}x^2)$, und das ganze Sphäroid $= \frac{1}{6} a b^2 \pi$.

§. 380.

Wenn man aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ den Werth $a^2 = \frac{b^2 x^2}{\frac{1}{4}b^2 - y^2}$ in $K = \frac{b^2 x \pi}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}x^2)$ substituirt, so bekömmt man

$K = \frac{1}{6}\pi x (b^2 + 2y^2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} x b^2 \pi + \frac{1}{3} x y^2 \pi$.

In dieser Formel sind $\frac{1}{4} x b^2 \pi$ und $x y^2 \pi$ die Inhalte zweyer Cylinder, deren Höhe $= x$ ist, und deren Grundflächen die Durchmesser b und 2 y haben.

Da der Inhalt eines runden Fasses mit gleichen Böden, dessen Länge $= 2x$, dessen Spundtiefe $= b$, und dessen Bodentiefe 2 y ist, von dem Doppelten des eben berechneten abgekürzten Sphäroides, nämlich von

$\frac{2}{3}.2x.\frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{3}.2x.y^2\pi$ nur wenig unterschieden seyn kann, so erhält man den Inhalt des Fasses sehr nahe, wenn man zwey Cylinder berechnet, wovon die Grundfläche des einen, dem durch den Spund zu den Böden parallelen Durchschnitte, die Grundfläche des andern der Bodenfläche selbst, die Höhe eines jeden aber der Länge des Fasses gleich ist, und zu zwey Dritteln des erstern Cylinders ein Drittel des letztern addirt.

Will man den Inhalt des Fasses sogleich in Cubik-Einheiten finden, welche für Flüssigkeiten üblich sind, so muß das zur Ausmessung der Länge, der Spund- und der Bodentiefe des Fasses anzuwendende Längenmaß der Seite eines Würfels gleich seyn, dessen Inhalt die Einheit des Flüssigen ist.

Da z. B. eine baierische Maß 0,043 baier. Cubik-Fuß enthält, so muß das Längenmaß $= \sqrt[3]{0{,}043} = 0{,}35034$ baier. Fuß seyn, wenn man den Inhalt des Fasses in baier. Maßen finden will.

C. Von der Hyperbel.

§. 381.

Aus der Gleichung der Hyperbel, $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$ (§. 309.) welche Linie wie die Ellipse durch zwey beständige Linien a und p bestimmt wird, läßt sich Folgendes über ihre Gestalt schließen:

Für positive Werthe von x bleibt y immer möglich, und nimmt mit x zugleich zu; da aber $x \gtrless \frac{x}{a} \cdot x$, und daher auch $px \gtrless \frac{p}{a}x^2$ wird, wenn $x \gtrless a$ ist, so ist bey negativen Werthen von x, wenn dieselben $\gtrless a$ sind, das negative Glied px $\gtrless$ als das positive $\frac{p}{a}x^2$; mithin ist im ersten Falle y unmöglich, im zweyten aber möglich.

Zwischen zwey geraden Linien, welche durch die Scheitel auf der Achse senkrecht sind, liegt also kein Punct der Hyperbel; sondern von den beyden abgesonderten Theilen, aus welchen die Hyperbel besteht (§. 306.), wird jeder durch die Achse in zwey unbegrenzte Schenkel getheilt, welche sich von A aus (Fig. 22.) längst AX, und von B aus längst BX' von der Achse immer weiter entfernen.

§. 382.

Wenn für einen Punct der Hyperbel die Coordinaten x, y, für einen andern aber x', y', sind, so ist $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$ und $y'^2 = px' + \frac{p}{a}x'^2$; also verhält sich $y^2 : y'^2 = x(a+x) : x'(a+x')$.

Nun sind x und $a + x$ die Entfernungen der Ordinate, welcher die Abscisse x zugehört, von den Scheiteln der Achse; also verhalten sich bey der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten wie

die Producte aus ihren Entfernungen von den beyden Scheiteln der Achse, wie bey der Ellipse (§. 342.); nur hat dabey die Verschiedenheit Statt, daß die Scheitel der Achse bey der Ellipse an entgegen gesetzten, bey der Hyperbel aber an einerley Seite der Ordinate liegen.

Soll $y' = y$ seyn, so muß auch $x'(a+x') = x(a+x)$, und folglich $x' = -\frac{1}{2}a \pm (\frac{1}{2}a + x)$, nämlich entweder $x' = x$, oder $x' = -(a+x)$ seyn. Nimmt man daher auf der Seite der negativen Abscissen, $Ap = AB + AP$ (wenn AP die Abscisse des beliebigen Punctes M der Hyperbel ist), so ist also die Ordinate mp des Punctes m, wozu Ap als Abscisse gehört, $= MP$.

Aus $Ap = AB + AP$ folgt $Bp = AP$, und $Cp = CP$, wenn C in der Mitte von AB liegt. Zieht man unter der Voraussetzung, daß m und M an einerley Seite der Achse liegen, die Sehne mM, und DE durch C auf X'X senkrecht, so wird mpPM ein Rechteck, dessen Seite mM von DE in Q senkrecht halbirt wird.

Wenn man aber mp durch p bis an die Hyperbel verlängert, so ist $m'p = mp = MP$, und da über dieß $Cp = CP$ und $m'pC = 90° = MPC$ ist; so ist, wenn man Cm' und CM zieht, das Dreyeck m'pC dem Dreyecke MPC congruent, und folglich $m'C = MC$ und $m'Cp = MCP$; daher liegen CM und Cm' in gerader Linie.

Aus diesen Sätzen folgt nun, daß auch DE eine Achse, daß C der Mittelpunct der Hyperbel sey, und daß diese Linie durch X'X in vier congruente Schenkel getheilt werde.

§. 383.

Da DE von der Hyperbel nirgends geschnitten wird, so hat diese Achse keine Scheitel, und also auch keine dadurch bestimmte Größe; man nimmt aber wegen der Analogie der Gleichung der Hyperbel mit jener der Ellipse die mittlere Proportional-Linie zwischen AB und dem Parameter für ihre Größe an, so daß also diese Größe $b = \sqrt{ap}$ wie bey der Ellipse wird.

Zur Unterscheidung heißt AB die erste oder Querachse, und DE die zweyte oder vereinigte (§. 229.) Achse der Hyperbel.

Da bey der Hyperbel p jedes Verhältniß zu a haben kann, so ist dieses auch bey $b = \sqrt{a\,p}$ der Fall. Sind nun die beyden Achsen einer Hyperbel gleich, so heißt sie gleichseitig.

Für die gleichseitige Hyperbel ist also $\sqrt{a\,p} = a$, und daher auch $p = a$.

§. 384.

Wenn man die Abscissen vom Mittelpuncte auf der Querachse genommen mit u bezeichnet, so ist $x = u - \frac{1}{2}a$; daher verwandelt sich die Gleichung $y^2 = p\,x + \frac{p}{a}x^2$ in

$$y^2 = \frac{p}{a}u^2 - \tfrac{1}{4}a\,p.$$

Für rechtwinklige Coordinaten u' und y', die Abscissen vom Mittelpuncte der vereinigten Achse genommen, ist aber $y = u'$ und $u = y'$; daher aus der vorhergehenden Gleichung,

$$y'^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a}{p}u'^2.$$

§. 385.

Substituirt man in diesen Gleichungen, $\frac{b^2}{a}$ für p aus $b = \sqrt{a\,p}$ (§. 383.), so wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a\,x + x^2) = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \text{ und}$$

$$y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(\tfrac{1}{4}b^2 + u'^2).$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist also

$$y^2 = a\,x + x^2 = u^2 - \tfrac{1}{4}a^2, \text{ und}$$

$$y'^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + u'^2.$$

§. 386.

Für die Stellen der Brennpuncte ist nach der Formel

$f = \frac{p\sqrt{a}}{2(1 \pm \sqrt{q+1})}$ (§. 312.) bey der Hyperbel, also für $q = \frac{p}{a}$ (§. 309.),

$$f = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a} \pm \sqrt{a+p})}.$$

Die Hyperbel hat mithin, wie die Ellipse, zwey Brennpuncte; den einen F auf der Seite der positiven Abscissen im Abstande $AF = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a+p})}$ vom Scheitel A, den andern F′ auf der Seite der negativen Abscissen im Abstande $AF' = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a+p}-\sqrt{a})}$; denn der zweyte Werth von f ist

$$= \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a+p})} = -\frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a+p}-\sqrt{a})}.$$

Die Entfernungen der Brennpuncte vom Mittelpuncte sind also

$$CF = CA + AF = \tfrac{1}{2}a + \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a+p})}, \text{ und}$$

$$CF' = AF' - AC = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a+p}-\sqrt{a})} - \tfrac{1}{2}a.$$

Wenn man diese Ausdrücke, wie bey der Ellipse (§. 351.) reducirt, so findet man $CF = CF' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + ap}$; die Brennpuncte sind daher auch bey der Hyperbel gleich weit vom Mittelpuncte entfernt, und haben folglich gleiche Abstände von den Scheiteln.

§. 387.

Wird der Abstand eines Brennpunctes vom Mittelpuncte, oder die Excentricität mit e bezeichnet, so ist $e = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+ap} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ (§. 383.) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{1}{2}b)^2}$; sie ist also der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes gleich, dessen Katheten so groß sind, als die Hälften der beyden Achsen.

Vermittelst dieses Satzes können die Stellen der Brennpunc-

te einer Hyperbel leicht construirt werden, wenn die beyden Achsen bekannt sind.

§. 388.

Für die Leitstrahlen erhält man aus §. 312., wenn man $q = \frac{p}{a}$ setzt, die Formeln:

$$\pm\left[\frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a+p})}+\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a+p}\right], \text{ und}$$

$$\pm\left[\frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a+p})}-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a+p}\right] \text{ oder}$$

$$\pm\left[\frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a+p}-\sqrt{a})}+\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a+p}\right].$$

Wenn bloß die Größe der Leitstrahlen, ohne auf ihre Lage Rücksicht zu nehmen, bestimmt wird, und daher die positiven Werthe dieser Formeln beybehalten werden, so hat man

$$F\,M = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a+p})}+\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a+p}, \text{ und}$$

$$F'\,M = \frac{p\sqrt{a}}{2(\sqrt{a+p}-\sqrt{a})}+\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a+p};$$

oder, wenn man aus $e = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+ap}$ (§. 387.), $\frac{4e^2-a^2}{a}$ für p substituirt,

$$F\,M = e-\tfrac{1}{2}a+\frac{2e}{a}x, \text{ und } F'\,M = e+\tfrac{1}{2}a+\frac{2e}{a}x.$$

Die Differenz dieser Werthe, oder $F'\,M - F\,M$ ist $= a$; bey der Hyperbel ist also der Unterschied der Abstände eines jeden Punctes von den beyden Brennpuncten immer der Querachse gleich, mithin eine beständige Linie.

§. 389.

Die eben angeführte Eigenschaft kömmt der Hyperbel ausschließlich zu; denn wenn bey einer Linie die Differenz der Entfernungen $F'\,M$ und $F\,M$ eines jeden Punctes M von zwey Puncten F' und F

eine beständige Linie a ist, so muß erstlich $F'F + FM > F'M$, mithin $F'F > F'M - FM$, nämlich $F'F > a$ seyn.

Wenn man $F'F$ in zwey Theile theilet, so kann die Differenz der Theile von Null bis $F'F$ zunehmen, folglich größer als a werden; daher muß es auf $F'F$ zwey Puncte A und B geben, die zur Linie gehören, welcher die erwähnte Eigenschaft zukömmt.

Für diese Puncte muß also $F'A - FA = FB - F'B = a$, nämlich $F'F - 2FA = a$ und $F'F - 2F'B = a$, daher $FA = \frac{1}{2}(F'F - a) = F'B$ seyn.

Um eine Gleichung der Linie zu finden, seyen $AP = x$ und $MP = y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes M, so wird

$FM^2 = FP^2 + MP^2$, und $F'M^2 = F'P^2 + MP^2$, nämlich $FM^2 = (x - AF)^2 + y^2$ und $(a + FM)^2 = (x - AF + F'F)^2 + y^2$. Verfährt man mit diesen Gleichungen auf ähnliche Weise, wie mit denen des §. 355., so erhält man

$$y^2 = \frac{(F'F^2 - a^2)}{a^2}(ax + x^2).$$

Diese Gleichung ist nun einerley mit der Gleichung einer Hyperbel, deren Querachse $= a$, und deren vereinigte Achse $= \sqrt{FF'^2 - a^2}$ ist, wenn die Abscissen auf der Querachse von einem Scheitel aus genommen werden (§. 385.).

Die Linie ist also eine Hyperbel, A und B sind die Scheitel ihrer Querachse, und F, F' ihre Brennpuncte; denn wenn die vereinigte Achse mit b bezeichnet wird, so ist $b^2 = F'F^2 - a^2$, folglich $F'F = \sqrt{a^2 + b^2}$ = der doppelten Excentricität (§. 387.).

§. 390.

Um Puncte einer Hyperbel geometrisch zu bestimmen, wenn die beyden Achsen gegeben sind, suche man zuerst die Excentricität e (§. 387.), und mache aus der Mitte C der Querachse AB, $CF = CF' = e$, so sind F und F' die Brennpuncte.

Dann nehme man auf der Verlängerung von $F'F$ einen willkürlichen Punct P, und beschreibe mit BP und AP aus

den Brennpuncten Kreislinien, so sind die Durchschnitte der letztern, Puncte der Hyperbel; denn die Differenz der Entfernungen eines jeden solchen Punctes von F′ und F ist = A B (§. 389.). Durch Veränderung des Ortes des Punctes P lassen sich auf diese Art beliebig viele Puncte der Hyperbel bestimmen.

§. 391.

Ein Lineal lasse sich um den einen Brennpunct F′ so drehen, daß dessen Kante H G bey jeder Lage des Lineals durch F′ geht; in G und im andern Brennpuncte F seyen die Enden einer Schnur befestiget, welche um die Querachse A B kürzer als F′G ist. Wenn man das Lineal um F′ dreht, und während dessen vermittelst eines an F′ G gehaltenen Stiftes M die Theile F M und M G der Schnur gerade anzieht, so wird vom Stifte der Bogen einer Hyperbel beschrieben, deren Querachse A B, und deren Brennpuncte F und F′ sind; denn es ist für jeden Ort M des Stiftes,

$$F'M - FM = F'G - (FM + MG) = AB.$$

§. 392.

Die allgemeinen Formeln (§. 317.) geben, wenn man $q = \frac{p}{a}$ setzt, für die Hyperbel,

$$\text{Subt.} = 2\,(p\,x + \frac{p}{a}\,x^2) : (p + \frac{2\,p}{a}\,x) = \frac{2\,x\,(a + x)}{a + 2\,x}$$

$$= \frac{x\,(a+x)}{\frac{1}{2}\,a + x};$$

$$\text{Subnorm.} = \tfrac{1}{2}\,(p + \frac{2\,p}{a}\,x) = \frac{p}{2\,a}\,(a + 2\,x);$$

$$\text{Tang.} = 2\,(p\,x + \frac{p}{a}\,x^2)^{\frac{1}{2}}\,[\tfrac{1}{4}\,p^2 + \frac{(a+p)}{a}\,(p\,x + \frac{p}{a}\,x^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$: (p + \frac{2\,p}{a}\,x)$$

$$= \frac{2\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}(a+x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{1}{4}a^2p^2 + p(a+p)\,x\,(a+x)}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$: \frac{p}{a}(a+2x)$$

$$= \frac{2\,x^{\frac{1}{2}}(a+x)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a+2x)}\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a+p)\,x\,(a+x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{a+2x}\sqrt{\frac{x(a+x)}{a}\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a+p)\,x\,(a+x)\right]};$$

$$\text{Norm.} = \frac{1}{a}\sqrt{p\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a+p)\,x\,(a+x)\right]}.$$

§. 393.

In der Formel für die Subtangente ist $x = AP$, $a + x = BP$ und $\frac{1}{2}a + x = CP$, mithin Subt. $= \frac{AP.BP}{CP}$.

Man erhält also die Subtangente PT eines Punctes M der Hyperbel, wenn man die vierte Proportional-Linie zu den Abständen der Ordinate MP vom Mittelpuncte und den beyden Scheiteln nimmt. Durch die Größe der Subtangente PT ist die Lage der Tangente MT bekannt.

§. 394.

Da $CT = CP - PT = \frac{1}{2}a + x - \frac{x(a+x)}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{a^2}{2(a+2x)}$

ist, so wird

$$FT = FC - CT = e - \frac{a^2}{2(a+2x)} \text{ und}$$

$$F'T = F'C + CT = e + \frac{a^2}{2(a+2x)}; \text{ mithin}$$

$$FT : F'T = 2ae + 4ex - a^2 : 2ae + 4ex + a^2$$

$$= 2a(e - \tfrac{1}{2}a + \frac{2e}{a}x) : 2a(e + \tfrac{1}{2}a + \frac{2e}{a}x)$$

$$= FM : F'M \text{ (§. 388.)};$$

Die Tangente halbirt also den Winkel der beyden Leitstrahlen des Berührungspunctes. Man kann daher die Tangente eines gegebenen Punctes der Hyperbel auch dadurch construiren, daß man die Leitstrahlen dieses Punctes zieht, und den Winkel, welchen sie mit einander machen, halbirt.

* §. 395.

Weil bey den Kegelschnitten überhaupt der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{(\text{Norm.})^3}{(\frac{1}{2}p)^2}$ (§. 318.), so ist für die Hyperbel,

$$\varrho = \frac{1}{a^3}\sqrt{p^3\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a+p)\,x\,(a+x)\right]^3} : \tfrac{1}{4}p^2 \text{ (§. 392.)}$$

$$= \frac{4}{a^3p}\sqrt{p\left[\tfrac{1}{4}a^2p + (a+p)\,x\,(a+x)\right]^3}.$$

Es nimmt also ϱ mit x beständig zu; folglich werden die Bögen der Hyperbel immer flacher, je weiter sie von den Scheiteln der Achse abstehen.

Z. B. bey der gleichseitigen Hyperbel wird für einen Punct, dessen Abscisse $= 10\,a$ ist, $\varrho = 13074{,}8\,a$.

§. 396.

Wenn man in der Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 385.)

die Potenz $(u^2 - \frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}$ nach §. 12. entwickelt, so erhält man

$$(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}} = u - \frac{a^2}{2.4u} - \frac{a^4}{2.4.4^2u^3} - \frac{3a^6}{2.4.6.4^3u^5} - \ldots,$$

und daher

$$y = \pm\left\{\frac{bu}{a} - b\left[\frac{1}{2.4}\left(\frac{a}{u}\right) + \frac{1}{2.4.4^2}\left(\frac{a}{u}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.6.4^3}\left(\frac{a}{u}\right)^5 + \ldots\right]\right\}.$$

Behält man das erste Glied allein, so wird $y = \pm\frac{bu}{a}$ die Gleichung eines Systemes zweyer geraden Linien V′ V und VV′ VV (Fig. 23.), welche durch den Mittelpunct C gehen, und

mit der Querachse X'X an entgegen gesetzten Seiten derselben gleiche spitzige Winkel VV C X und V C X machen; denn da für $x = a$, $y = \pm b$ wird, so geht die eine von diesen geraden Linien, deren Gleichung $y = + \frac{b}{a} u$ ist, durch einen Punct, dessen Abscisse auf der Querachse $= a$, und dessen Ordinate $= + b$ ist; die andere aber geht durch einen Punct, dessen Coordinaten $= a$ und $= - b$ sind; es ist also tang. VV C X $= \frac{b}{a}$, und tang. V C X $= - \frac{b}{a}$, mithin sind VV C X und V C X gleich groß und liegen an entgegen gesetzten Seiten von X'X.

§. 397.

Da VV C X spitzig ist, so wird C VV von der Ordinate des willkürlichen Punctes M in demjenigen Schenkel der Hyperbel, welcher mit C VV an einerley Seite der Querachse liegt, irgendwo in M' geschnitten, und es ist $M'P = \frac{b}{a} CP = \frac{b}{a} u$,

MP aber $= \frac{b}{a} u - b \left[\frac{1}{2.4} \left(\frac{a}{u} \right) + \frac{1}{2.4.4^2} \left(\frac{a}{u} \right)^3 + \ldots \right]$,

folglich ist $M'P$ stets größer als MP; also liegt der Schenkel A M ganz zwischen C VV und C X.

Allein da $M'P - MP = b \left[\frac{1}{2.4} \left(\frac{a}{u} \right) + \frac{1}{2.4.4^2} \left(\frac{a}{u} \right)^3 + \ldots \right]$

ist, und die Brüche $\frac{a}{u}$, $\left(\frac{a}{u} \right)^3$, ... abnehmen, wenn u wächst, so wird M' M, und folglich (wegen des beständigen Winkels C M' P) auch der Abstand des Punctes M von C VV desto kleiner, je größer C P genommen wird. Weil u beliebig groß genommen werden kann, so kann der Bruch $\frac{a}{u}$, und daher auch $M'P - MP$ beliebig klein werden; also gibt es auf dem Schenkel A M Puncte, deren Abstände von C VV kleiner sind, als

jede gegebene noch so kleine gerade Linie, ohne daß A M mit C VV jemals zusammen trifft.

Wegen der Gleichheit der Winkel, welche V′ V und VV′ VV mit X′ X machen, und wegen der Congruenz der Schenkel der Hyperbel und ihrer Lage gegen X′ X hat jeder von den übrigen Schenkeln eben dieselbe Lage gegen den anliegenden Theil einer der beyden Linien V′ V und VV′ VV, welche A M gegen C VV hat.

V′V und W′VV sind also gerade Linien, welchen die Hyperbel sich immer desto mehr nähert, je weiter ihre Theile von den Scheiteln abstehen, ohne damit zusammen zu treffen.

Eine gerade Linie, welcher sich eine krumme beliebig, nämlich so nähert, daß ihr Abstand von der geraden kleiner werden kann, als jede gegebene gerade Linie (§. 112.), ohne mit ihr zusammen zu treffen, heißt eine Asymptote der krummen Linie. V′ V und VV′ VV sind daher Asymptoten der Hyperbel.

§. 398.

Der Gleichung der Asymptoten, $y = \pm \frac{b}{a} x$ zu Folge wird $y = \pm \frac{1}{2} b$, wenn $x = \frac{1}{2} a$ ist.

Wenn man daher durch den Scheitel A eine Senkrechte auf die Querachse zieht, auf derselben $A D = A E = \frac{1}{2} b$ macht, und durch C und D die gerade Linie VV′ VV, so wie auch durch C und E die gerade Linie V′ V zieht, so sind diese Linien die Asymptoten.

§. 399.

Bezeichnet man den Asymptoten-Winkel VV C V mit ν, so ist $\text{tang.} \frac{1}{2} \nu = \frac{b}{a}$ (§. 396.).

Bey der gleichseitigen Hyperbel (§. 383.) ist $\text{tang.} \frac{1}{2} \nu = 1$, folglich $\frac{1}{2} \nu = 45°$, und $\nu = 90°$; also sind bey der gleichseitigen Hyperbel die Asymptoten auf einander senkrecht.

§. 400.

Wenn man A L durch A zur Asymptote C W parallel zieht, so ist wegen $AE = \frac{1}{2} DE$, auch $AL = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2}\sqrt{CA^2 + AD^2}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2} = \frac{1}{2} e$ (§. 387.).

Das Quadrat dieser Linie $AL = q$ heißt die Potenz der Hyperbel; man hat also für die Potenz die Formel: $q^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2)$.

Da $AD = AE$, so ist auch $CL = LE = \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2} CD = AL = q$.

§. 401.

Zwischen den Größen: a, b, p, e, q und η haben die Gleichungen: $b = \sqrt{ap}$ (§. 383.), $e = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + ap}$ (§. 387.), $q^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2)$ (§. 400.), und $\text{tang.} \frac{1}{2}\eta = \frac{b}{a}$ (§. 399.) Statt; also sind durch zwey von diesen Größen die übrigen, daher auch immer a und p, und folglich die Hyperbel bestimmt (§. 381.).

§. 402.

Nimmt man eine Asymptote V' V als Abscissen-Linie, den Mittelpunct C als Anfangspunct, die Ordinaten zur andern Asymptote parallel, und bezeichnet man die Coordinaten mit x', y'; so ist nach diesen Voraussetzungen, wenn man durch einen Punct m der Hyperbel, m p zu W' W parallel zieht, $Cp = x'$, $mp = y'$, und der Coordinaten-Winkel $mpV = WCV = \eta$.

Die Gleichung zwischen x' und y' kann aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$, oder $y^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2 + \frac{1}{4}b^2 = 0$ (§. 385.) gefunden werden, wenn man in den Formeln (§. 233.) $a = 0, b = 0, x = u, \alpha = 90°, \beta = \eta$ und $\gamma = -\frac{1}{2}\eta$ setzt, weil der Winkel der beyden Abscissen-Linien, XCV an der entgegen gesetzten Seite von CX liegt.

Man erhält dann

$u = y' \cos. \frac{1}{2}\eta + x' \cos. \frac{1}{2}\eta = (y' + x') \cos. \frac{1}{2}\eta$, und

$y = y' \sin. \frac{1}{2}\eta - x' \sin. \frac{1}{2}\eta = (y' - x') \sin. \frac{1}{2}\eta$; folglich

$(y'-x')^2 \sin.^2 \frac{1}{2}\eta - \frac{b^2}{a^2}(y'+x')^2 \cos.^2 \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{4}b^2 = o$, oder

da $\frac{b^2}{a^2} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\eta$ (§. 399.), und daher

$\sin.^2 \frac{1}{2}\eta = \frac{b^2}{a^2+b^2}$ und $\cos.^2 \frac{1}{2}\eta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ ist,

$\frac{b^2}{a^2+b^2}(y'-x')^2 - \frac{b^2}{a^2+b^2}(y'+x')^2 + \frac{1}{4}b^2 = o$, nämlich $x'y' = \frac{1}{16}(a^2+b^2) = q^2$ (§. 400.), welches die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten ist.

§. 403.

Aus $x'y' = q^2$ ist $y' = \frac{q^2}{x'}$; y' wird also desto kleiner, je größer x' ist, kann aber bey keinem Werthe von x' Null werden, daher liegt kein Punct der Hyperbel in V' V.

Für $x' = o$ wird y unbegrenzt, folglich liegt auch in VV' W kein Punct der Hyperbel.

Auch gehört zu jeder Abscisse nur Eine Ordinate, und zwar eine positive oder negative, je nachdem die Abscisse positiv oder negativ ist.

Wenn x'', y'' die Coordinaten eines andern Punctes sind, so ist ebenfalls $x''y'' = q^2 = x'y'$; mithin $y'' : y' = x' : x''$, d. h. die Ordinaten verhalten sich umgekehrt wie die Abscissen.

Setzt man in der Gleichung $y' = \frac{q^2}{x'}$, $x' = q$, so wird $y' = q$, und diese Werthe sind die Coordinaten des Scheitels A (§. 400.).

*§. 404.

Aus der Formel: $\text{Subt.} = \frac{y'dx'}{dy'}$ (§. 255.) erhält man für die Hyperbel zwischen den Asymptoten,

$$\text{Subt.} = \frac{q^2 x'^{-1} dx}{-q^2 x'^{-2} dx'} = -x'.$$

Wenn man also durch einen Punct m einer Hyperbel eine Parallele m p zu einer Asymptote C V' zieht, und auf der andern Asymptote C V, p T = C p nimmt, so liegt T in der Tangente des Punctes m, wodurch also die Lage derselben bestimmt ist.

Im Dreyecke C T t, welches durch die Tangente T t des Punctes m, und durch die Stücke C T und C t der Asymptoten begrenzt wird, ist m p ∥ C t und C p = p T, also auch t m = m T; die Asymptoten schneiden also von der Tangente auf beyden Seiten des Berührungspunctes gleiche Stücke ab.

Substituirt man in den übrigen Formeln des §. 255., $\frac{q^2}{x'}$ für y', und ν für α, so bekömmt man für die Hyperbel zwischen den Asymptoten,

$$\text{Subnorm} = \frac{q^2 (x'^2 \cos\nu - q^2)}{x' (x'^2 - q^2 \cos\nu)};$$

$$\text{Tang} = -\frac{1}{x'} \sqrt{q^4 - 2 q^2 x'^2 \cos\nu + x'^4};$$

$$\text{Norm} = \frac{q^2 \sin\nu \sqrt{q^4 - 2 q^2 x'^2 \cos\nu + x'^4}}{x' (x'^2 - q^2 \cos\nu)}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, nämlich für $\nu = 90°$ (§. 399.) ist also

$$\text{Subt.} = -x', \quad \text{Subnorm} = -\frac{q^4}{x'^3},$$

$$\text{Tang} = -\frac{1}{x'} \sqrt{q^4 + x'^4}, \quad \text{Norm} = \frac{q^2}{x'^3} \sqrt{q^4 + x'^4}.$$

* §. 405.

Fig. 24. Um die Lage der geraden Linien zu finden, welche Durchmesser der Hyperbel sind, suche man aus einer von den Gleichungen der Hyperbel, z. B. aus $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ zwischen den rechtwinkligen Coordinaten C P = u auf der Queraxe, und M P = y (§. 385.) die allgemeinste Gleichung für diese Linie.

Es sey also HZ die neue Abscissen-Linie, H der Anfangspunct, CG = f und HG = g dessen Coordinaten auf der Querachse, γ der Winkel, welchen HZ mit der Querachse macht, die Coordinaten HP' = v, MP' = w, und ihr Winkel MP'Z = β.

Man setze daher in den Formeln (§. 233.)

$x = u$, $x' = v$, $y' = w$, $\alpha = 90°$, $a = f$ und $b = g$, so wird

$y = w \sin(\beta+\gamma) + v \sin\gamma + g$ und

$u = w \cos(\beta+\gamma) + v \cos\gamma + f$.

Diese Werthe in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ oder

$y^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2 + \frac{1}{4}b^2 = o$ substituirt, geben

$[a^2 \sin^2(\beta+\gamma) - b^2 \cos^2(\beta+\gamma)]\, w^2$

$+ 2\{[a^2 \sin(\beta+\gamma)\sin\gamma - b^2 \cos(\beta+\gamma)\cos\gamma]\, v +$

$[a^2 g \sin(\beta+\gamma) - b^2 f \cos(\beta+\gamma)]\}\, w +$

$(a^2 \sin^2\gamma - b^2 \cos^2\gamma)\, v^2 + 2(a^2 g \sin\gamma - b^2 f \cos\gamma)\, v$

$+ (a^2 g^2 - b^2 f^2 + \frac{1}{4}a^2 b^2) = o$.

Diese Gleichung gibt nur dann bey jedem Werthe von v zwey gleiche und entgegen gesetzte Werthe für w, wenn das zweyte Glied bey jedem Werthe von v Null ist, welches Statt findet, wenn

$a^2 \sin(\beta+\gamma)\sin\gamma - b^2 \cos(\beta+\gamma)\cos\gamma = o$ und

$a^2 g \sin(\beta+\gamma) - b^2 f \cos(\beta+\gamma) = o$ ist.

Aus der ersten von diesen Gleichungen ist $\operatorname{tang}(\beta+\gamma) \times \operatorname{tang}\gamma = \frac{b^2}{a^2}$, und aus der zweyten, $\operatorname{tang}(\beta+\gamma) = \frac{b^2 f}{a^2 g}$, mithin auch $\operatorname{tang}\gamma = \frac{g}{f}$.

* §. 406.

Zieht man HC, so ist $\operatorname{tang} HCG = \frac{HG}{CG} = \frac{g}{f}$; mithin muß, wenn HZ ein Durchmesser seyn soll, diese Linie durch C gehen.

Es ist also keine gerade Linie, die nicht durch den Mittelpunct geht, ein Durchmesser der Hyperbel.

Man nehme nun an, HZ gehe durch den Mittelpunct, und dieser sey, um die Gleichung einfacher zu machen, der Anfangspunct der Abscissen; auch setze man $\frac{b^2}{a^2}$ statt $\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\tan\gamma$ (§. 405.), so wird

$$\sin^2(\beta+\gamma)=\frac{a^4b^4\cos^2\gamma}{a^4\sin^2\gamma+b^4\cos^2\gamma},$$

$$\cos^2(\beta+\gamma)=\frac{b^4\sin^2\gamma}{a^4\sin^2\gamma+b^4\cos^2\gamma},$$ und die Gleichung, welche im vorhergehenden §. gefunden wurde, verwandelt sich in

$$\frac{a^2b^2(b^2\cos^2\gamma-a^2\sin^2\gamma)}{a^4\sin^2\gamma+b^4\cos^2\gamma}w^2-(b^2\cos^2\gamma-a^2\sin^2\gamma)v^2+\tfrac{1}{4}a^2b^2=0.$$

Dieser Gleichung zu Folge ist jede durch den Mittelpunct gehende gerade Linie ein Durchmesser der Hyperbel, den Fal ausgenommen, wenn γ einen solchen Werth hat, daß dadurch $b^2\cos^2\gamma-a^2\sin^2\gamma=0$ wird.

Die Voraussetzung dieses Falles gibt $\tan^2\gamma=\frac{b^2}{a^2}=\tan^2\frac{1}{2}\eta$ (§. 399.); mithin $\gamma=\pm\frac{1}{2}\eta$; also sind von allen durch den Mittelpunct gezogenen geraden Linien nur die Asymptoten keine Durchmesser.

* §. 407.

Aus $\tan(\beta+\gamma)\tan\gamma=\frac{b^2}{a^2}$ (§. 405.) ist $\tan(\beta+\gamma)=\frac{b^2}{a^2\tan\gamma}$ für den Winkel $(\beta+\gamma)$, welchen die vom Durchmesser halbirten Sehnen mit der Querachse machen, und $\tan\beta=\frac{b^2\cot\gamma-a^2\tan\gamma}{a^2+b^2}$ für den Winkel dieser Sehnen mit dem Durchmesser selbst.

Aus der letzten Formel erkennt man, daß β nur dann ein rechter Winkel ist, wenn $\gamma=0$ oder $\gamma=90^\circ$ ist. Die Hyperbel hat also keine andern Achsen, als die schon gefundenen.

* §. 408.

Wenn man in der Gleichung (§. 406.) $w = o$ setzt, so wird

$$v = \pm \frac{ab}{a\sqrt{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}}$$; für $v = o$ aber wird $w = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}{a^2\sin^2\gamma - b^2\cos^2\gamma}}$.

Damit $\frac{ab}{2\sqrt{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}}$ möglich sey, wird erfordert, daß $b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma$ positiv, also $b^2\cos^2\gamma > a^2\sin^2\gamma$, nämlich $\text{tang}^2\gamma < \frac{b^2}{a^2}$ sey; dann ist aber $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}{a^2\sin^2\gamma - b^2\cos^2\gamma}}$ unmöglich. Das Gegentheil hat Statt, wenn γ einen solchen Werth hat, daß $\text{tang}^2\gamma > \frac{b^2}{a^2}$ ist.

Man nehme an, es sey $\text{tang}^2\gamma < \frac{b^2}{a^2}$, so ist $\text{tang}^2\gamma < \text{tang}^2\frac{1}{2}\eta$ (§. 399.), mithin $\gamma < \pm\frac{1}{2}\eta$. Der Durchmesser CZ fällt dann zwischen eine von den Asymptoten und die Querachse, und schneidet die Hyperbel in zwey Puncten A′ und B′, so daß $A'C = B'C = \frac{ab}{2\sqrt{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}}$, und daher $A'B' = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}}$ ist.

Bezeichnet man diese durch die Durchschnittspuncte A′ und B′ bestimmte Größe des Durchmessers mit a′ und $\sqrt{\frac{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}}$ mit b′, so verwandelt sich die Gleichung (§. 406.) in

$$\frac{a^2b^2}{b'^2}w^2 - \frac{a^2b^2}{a'^2}v^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 = o,$$ aus welcher

$$w^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(v^2 - \frac{1}{4}a'^2)$$ folgt.

* §. 409.

Durch den Mittelpunct ziehe man D′E′ zu MP′ parallel, nehme diese Linie als Abscissen-Linie, C als Anfangspunct, und die Ordinaten zu CZ parallel; so sind, wenn man MP″ zu CZ parallel zieht, CP″ = v′ und MP″ = w′ die Coordinaten des Punctes M.

Es ist aber alsdann $w = v'$ und $v = w'$, mithin $v'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(w'^2 - \frac{1}{4}a'^2)$, woraus man $w'^2 = \frac{a'^2}{b'^2}(v'^2 + \frac{1}{4}b'^2)$ findet.

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daß auch D′E′ ein Durchmesser sey, und zwar derjenige, welcher dem Durchmesser A′B′ conjugirt ist (§. 229.).

Setzt man $w' = 0$, so wird $v'^2 = -\frac{1}{4}b'^2$, also v′ unmöglich. Der Durchmesser D′E′ hat also keinen Scheitel, und folglich keine Größe, welche durch Durchschnittspuncte mit der Hyperbel bestimmt wird.

Man hat aber willkürlich b′ als die Größe dieses Durchmessers angenommen.

* §. 410.

Für die Abscisse A′P′ = t vom Anfangspuncte A′ auf A′Z genommen, ist $v = \frac{1}{2}a' + t$, mithin wird (§. 408.)

$$w^2 = \frac{b'^2}{a'}t + \frac{b'^2}{a'^2}t^2.$$

Wenn man die dritte Proportional-Linie zu a′ und b′ mit p′ bezeichnet, so ist $p' = \frac{b'^2}{a'}$, folglich

$w^2 = p't + \frac{p'}{a'}t^2$, und p′ heißt aus eben demselben Grunde, wie bey der Ellipse (§. 367.), der Parameter des Durchmessers a′.

* §. 411.

Wenn A′T die Tangente des Scheitels A′, und A′K auf der Querachse senkrecht ist, so hat man $TK = \frac{AK.BK}{CK}$ (§. 393.)

$$= \frac{AK(a + AK)}{CK} = \frac{a\,AK + AK^2}{CK} = \frac{a^2\,A'K^2}{b^2\,CK},$$ [denn es ist

$A'K^2 = \frac{b^2}{a^2}(a\,AK + AK^2)$ (§. 385.)]; also ist

$$\text{tang}\,A'TK = \frac{A'K}{TK} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{CK}{A'K} = \frac{b^2}{a^2}\cot A'CK = \frac{b^2}{a^2}\cot\gamma.$$

Ferner ist $CA'T = A'TK - A'CK$, mithin

$$\text{tang}\,CA'T = \frac{\text{tang}\,A'TK - \text{tang}\,A'CK}{1 + \text{tang}\,A'TK.\,\text{tang}\,A'CK} =$$

$$\left(\frac{b^2\cot\gamma}{a^2} - \text{tang}\,\gamma\right) : \left(1 + \frac{b^2\cot\gamma\,\text{tang}\,\gamma}{a^2}\right) =$$

$$\frac{b^2\cot\gamma - a^2\,\text{tang}\,\gamma}{a^2 + b^2} = \text{tang}\,\beta\ (\S.\ 407.);\ \text{also}$$

$CA'T = \beta = D'CZ.$

Die Tangente des Scheitels A' des Durchmessers $A'B'$ ist demnach zum vereinigten Durchmesser $D'E'$ parallel.

* §. 412.

Aus den Werthen für a' und b' (§. 408.) folgt

$$a'^2 - b'^2 = \frac{a^2b^2 - a^4\sin^2\gamma - b^4\cos^2\gamma}{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{a^2b^2 - b^4 - (a^4 - b^4)\sin^2\gamma}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{b^2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)\sin^2\gamma}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\gamma}$$

$= a^2 - b^2$; d. h. bey der Hyperbel ist die Differenz der Quadrate zweyer vereinigten Durchmesser der Differenz der Quadrate der beyden Achsen gleich.

Für die gleichseitige Hyperbel ist $b = a$, mithin $a'^2 - b'^2 = 0$, und daher $a' = b'$; in der gleichseitigen Hyperbel ist also jeder Durchmesser seinem vereinigten gleich.

* §. 413.

Ferner ist $a'b' = \frac{ab\sqrt{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}}{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}$; aber aus

$\text{tang}\,\beta = \frac{b^2 \cot\gamma - a^2 \text{tang}\,\gamma}{a^2+b^2}$ (§. 407.) findet man

$\cot\beta = \frac{a^2+b^2}{b^2\cot\gamma - a^2\,\text{tang}\,\gamma} = \frac{(a^2+b^2)\sin\gamma\cos\gamma}{b^2\cos\gamma - a^2\sin\gamma}$, und

$\text{cosec}\,\beta = \sqrt{1+\cot^2\beta} = \frac{\sqrt{a^4\sin^2\gamma + b^4\cos^2\gamma}}{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}$; daher wird

$a'b' = ab\ \text{cosec}\,\beta$, oder $a'b'\sin\beta = ab$.

Die Hyperbel hat also mit der Ellipse die Eigenschaft gemein, daß das Product zweyer vereinigten Durchmesser mit dem Sinus ihres Conjugations-Winkels multiplicirt, dem Producte der beyden Achsen gleich ist.

Ein Parallelogramm, welches zwey vereinigte Durchmesser als Seiten, und der Conjugations-Winkel als der davon eingeschlossene Winkel bestimmen, ist demnach immer dem Rechtecke aus den beyden Achsen gleich.

* §. 414.

Wenn man durch den Scheitel A′ eines Durchmessers, die Linie A′p zur Asymptote C V parallel zieht, und die Tangente dieses Scheitels bis an die Asymptoten in t′ und t verlängert, so ist $tpA' = \eta$, und CpA' dessen Supplement; also erhält man aus den Dreyecken CpA' und tpA',

$CA'^2 = Cp^2 + A'p^2 + 2\,Cp.\,A'p.\cos\eta$ und

$A't^2 = pt^2 + A'p^2 - 2\,pt.\,A'p.\cos\eta$.

Nun ist $pt = Cp$ (§. 404.), und $CA' = \frac{1}{2}a'$; folglich wird $\frac{1}{4}a'^2 - A't^2 = 4\,Cp.\,A'p.\cos\eta$.

Aber $Cp.\,A'p = q^2 = \frac{1}{10}(a^2+b^2)$ (§. 400.), und

$\text{tang}\,\frac{1}{2}\eta = \frac{b}{a}$ (§. 399.); daher ist aus der bekannten Formel:

$\text{tang}^2\frac{1}{2}\eta = \frac{1-\cos\eta}{1+\cos\eta}$, $\cos\eta = \frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\eta}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}\eta} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,

und mithin

$\frac{1}{4}a'^2 - A't^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2).\ \frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$, oder

$a'^2 - 4A't^2 = a^2 - b^2$.

Aus dieser Gleichung, und aus $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ (§. 412.) folgt endlich

$b' = 2 A' t = t' t$ (§. 404.).

Die Tangente durch den Scheitel eines Durchmessers gibt also nicht nur die Richtung des vereinigten Durchmessers an (§. 411.), sondern das Stück dieser Tangente, welches zwischen den Asymptoten liegt, ist auch seine Größe.

* §. 415.

Zieht man durch den Mittelpunct C, D'E' zu einer gegebenen Sehne M m parallel, so ist D'E' derjenige Durchmesser, dessen vereinigter B'A' diese Sehne in P' halbirt.

Da die Tangente t't des Scheitels A' zu D'E' (§. 411.), und mithin zu M m parallel ist, so ist auch wegen $t A' = A' t'$ (§. 404.), wenn man M m beyderseits bis an die Asymptoten verlängert, $R P' = P' r$.

Man hat daher $R P' - M P' = P' r - P' m$, nämlich $R M = m r$.

Von jeder geraden Linie, welche die Hyperbel schneidet, sind also die Stücke, welche zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegen, einander gleich.

* §. 416.

Diese Eigenschaft gibt ein einfaches Mittel, beliebig viele Puncte einer Hyperbel zu finden, wenn die Asymptoten V'V und V'V nebst einem Puncte M der Hyperbel gegeben sind.

Jede gerade Linie durch M, die zu keiner von den Asymptoten parallel ist, schneidet die letztern. Nimmt man auf einer solchen geraden Linie R r, $r m = M R$, so ist auch m ein Punct der Hyperbel. Solcher Puncte wie m kann man sich dann auch bedienen, um wieder andere Puncte der Hyperbel auf die angegebene Art zu bestimmen.

Wenn man alsdann aus den Puncten M, m... gerade Linien durch den Mittelpunct zieht, und davon auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunctes Stücke abschneidet, welche den

zugehörigen Abständen dieser Puncte vom Mittelpuncte gleich sind, so sind die Endpuncte dieser Stücke ebenfalls Puncte der Hyperbel, und zwar desjenigen Theiles derselben, welcher zwischen C V′ und C W′ liegt.

* §. 417.

Wegen der Parallelen R P′ und t A′ ist C A′ : A′ t = C P′ : R P′, also $RP'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} CP'^2$, und da $MP'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (CP'^2 - \frac{1}{4} a'^2)$ (§. 408.), so ist $RP'^2 - MP'^2 = \frac{1}{4} b'^2$.

Allein $RP'^2 - MP'^2 = (RP' - MP')(RP' + MP')$ $= RM (rP' + MP')$ (§. 415.) $= RM . Mr$; folglich ist $RM . Mr = (\frac{1}{2} b')^2$.

Wenn also eine gerade Linie, welche die Asymptoten schneidet, auch mit der Hyperbel zusammen trifft, so ist das Product der Abschnitte des Stückes zwischen den Asymptoten immer dem Quadrate desjenigen halben Durchmessers gleich, der zur geraden Linie parallel ist.

Ist die gerade Linie auf der Querachse senkrecht, so ist das Product der Abschnitte so groß, als das Quadrat der Hälfte der vereinigten Achse (§. 398.).

* §. 418.

Da zwischen den Größen: a, b, a′, b′, β und γ die Gleichungen:

$$\text{tang.}\beta = \frac{b^2 \cot.\gamma - a^2 \text{ tang.}\gamma}{a^2 + b^2}$$ (§. 407.),

$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ (§. 412.) und

$a' b' \sin.\beta = a b$ (§. 413.)

Statt haben, so sind durch drey von diesen Größen immer die drey übrigen bestimmt, und können aus den erstern gefunden werden.

§. 419.

Wenn man die Länge eines hyperbolischen Bogens durch die Formel

$s = \int (dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy \cos.\alpha)^{\frac{1}{2}} + C$, oder bey rechtwinkligen Coordinaten durch

$s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 250.) vermittelst einer von den Gleichungen der Hyperbel bestimmen will, so bekömmt man immer ein Differentiale von einer Form, dessen Integrale sich nur in einer Reihe darstellen läßt.

§. 420.

Fig. 22. Für die Quadratur der hyperbolischen Fläche A M P erhält man nach der Formel $V = \int y\,dx + C$ (§. 277.), wenn aus der Gleichung $y^2 = p\,x + \frac{p}{a}x^2$ (§. 309.) für y substituirt wird,

$$AMP = \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a+x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Dieses Integrale wird aus II, 1. (§. 295) vermittelst der Reductions-Formeln A und C eben so gefunden, wie (§. 375.) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(a-x)^{\frac{1}{2}}$ aus dem bekannten Integrale II, 3. (§. 295.).

Man erhält auf die angezeigte Art,

$$AMP = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}} \cdot [(a+2x)\sqrt{x(a+x)} - a^2\,L(\sqrt{x} + \sqrt{a+x})] + C.$$

Nun wird $AMP = o$, wenn $x = o$ ist; man bekömmt also

$o = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}}\,X - a^2\,L\sqrt{a} + C$, und

$C = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}}\,X\,a^2\,L\sqrt{a}$; folglich ist

$$AMP = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{a}} \cdot [(a+2x)\sqrt{x(a+x)} - a^2\,L(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}})].$$

§. 421.

Fig. 23. Für die Fläche A L p m ist nach der Formel

$V = \sin.\alpha \int y' dx' + C$ (§. 277.), weil $y' = q^2 x'^{-1}$ (§. 402.) und $\alpha = \eta$ ist,

$ALpm = \sin.\eta \int q^2 x'^{-1} dx' + C = q^2 \sin.\eta\, L\, x' + C.$

Diese Fläche wird Null, wenn $x' = q$ ist (§. 403.), also bekömmt man $C = -q^2 \sin.\eta\, L\, q$, und mithin

$$ALpm = q^2 \sin.\eta\, L\left(\frac{x'}{q}\right).$$

Bey der gleichseitigen Hyperbel ist $\eta = 90°$ (§. 399.), also für $q = 1$,

$ALpm = L\, x'$.

Wenn man daher bey der gleichseitigen Hyperbel, Cp durch AL mißt, so gibt der natürliche Logarithmus der Zahl, welche die Größe von Cp ausdrückt, die Größe der Fläche $ALpm$ an.

Deßhalb werden die natürlichen Logarithmen auch hyperbolische genannt. (§. 156.)

§. 422.

Substituirt man in der Formel

$W = 2\pi \int y\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 280.) die Werthe von y und dy aus der Gleichung

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, wobey x die Abscisse vom Mittelpuncte aus auf der Querachse bezeichnet (§. 385.); so bekömmt man durch eine ähnliche Rechnung wie §. 376., für die Oberfläche des Sphäroides, welches durch die Umdrehung der Fläche $AMPA$ (Fig. 22.) um die Querachse entsteht, die Formel

$$W = \frac{b\pi}{a^2}\left[\tfrac{1}{2}x(16e^2x^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^4}{8e} L\left(4ex + \sqrt{16e^2x^2 - a^4}\right)\right] + C.$$

Es ist aber $W = o$, wenn $x = \frac{1}{2}a$ ist, daher erhält man

$$C = \frac{b\pi}{a^2}\left[-\tfrac{1}{4}a^2 b + \frac{a^4}{8e} L.\, a(2e + b)\right], \text{ und mithin}$$

$$W = \frac{b\pi}{a^2}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{16e^2x^2 - a^4} - \tfrac{1}{4}a^2 b - \frac{a^4}{8e} L\left(\frac{4ex + \sqrt{16e^2x^2 - a^4}}{a(2e + b)}\right)\right],$$

in welcher Formel, e durch a und b vermittelst der Gleichung: $e = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2}$ (§. 387.) bestimmt ist.

§. 423.

Um den Inhalt dieses Sphäroides zu finden, kann man in der Formel $K = \pi \int y^2 \, dx + C$ (§. 281.) den Werth von y^2 aus der Gleichung $y^2 = p\,x + \frac{p}{a} x^2$ (§. 309.) substituiren.

Man erhält

$$K = \frac{p\pi}{a} \int (a\,x\,dx + x^2\,dx) + C$$

$$= \frac{p\pi}{a} \left(\tfrac{1}{2} a\,x^2 + \tfrac{1}{3} x^3\right) + C = \frac{p\,\pi\,x^2}{6\,a} (3\,a + 2\,x) + C.$$

Da in der Gleichung $y^2 = p\,x + \frac{p}{a} x^2$ der Scheitel als Anfangspunct der Abscissen vorausgesetzt ist, so muß für $x = o$ auch $K = o$ seyn; daher wird $C = o$, und folglich

$$K = \frac{p\,\pi\,x^2}{6\,a} (3\,a + 2\,x).$$

D. Anmerkungen.

§. 424.

Die Formeln für die Subtangente, Subnormale u. s. w. eines jeden besondern Kegelschnittes wurden dadurch gefunden, daß in den Formeln (§. 317.) entweder $q = o$, oder $q = \pm \frac{p}{a}$ gesetzt wurde. Es ist aber nicht nöthig, daß man jede von diesen Formeln, wenn man derselben bedarf, auf diese Art suche; sondern man kann dieselbe unmittelbar aus den allgemeinen Formeln (§. 254. oder §. 255.) ableiten, wenn man darin die Werthe von y und dy aus der Gleichung des besondern Kegelschnittes substituirt.

Ferner beziehen sich diese Formeln durchgehends auf jenes Coordinaten-System, auf welches die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte (§. 302.) bezogen ist; will man aber diese Formeln in Beziehung auf ein anderes Coordinaten-System wissen, so muß man zuerst die Gleichung des Kegelschnittes für dieses Coor-

dinaten-System suchen, und dann die Werthe von y und dy aus dieser Gleichung in den allgemeinen Formeln für die Subtangente ꝛc. substituiren.

So findet man z. B. für die Parabel, wenn die Leitlinie als Abscissen-Linie, und ihr Durchschnitt mit der Achse als Anfangspunct angenommen wird, bey Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die Gleichung: $y^2 = \frac{p^2 + 4x^2}{4p}$; also wird

$$\text{Subt.} = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{p^2+4x^2}{8x};$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{x(p^2+4x^2)}{2p^2};$$

$$\text{Tang.} = \frac{y}{dy}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8px}\sqrt{(p^2+4x^2)^3};$$

$$\text{Norm.} = \frac{y}{dx}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4p^2}\sqrt{(p^2+4x^2)^3}.$$

* §. 425.

Sollte eine Formel für die krumme Fläche gefunden werden, welche ein Bogen einer Kegelschnittslinie bey seiner Umdrehung um irgend einen Durchmesser beschreibt, so muß zuerst die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten eingerichtet werden, damit man die allgemeine Formel für VV (§. 280.) anwenden könne.

Diese Gleichung dienet dann auch, den Inhalt des zugehörigen Sphäroides nach der allgemeinen Formel für K (§. 281.) berechnen zu können.

* §. 426.

Die Gleichung $y^2 = px + qx^2$ ist nicht nur bey Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten (§. 320. u. 345.), sondern auch, wenn sie sich auf schiefwinklige Coordinaten bezieht, einem Kegelschnitte zugehörig. Denn wenn im letztern Falle $q = o$ ist, so gehört sie zur Parabel, und die Abscissen-Linie ist ein Durchmesser, dessen Parameter p ist (§. 335.). Wenn q negativ ist, so gehört sie zur Ellipse; die Abscissen-Linie ist ein Durchmesser,

p dessen Parameter, und q die Größe des Verhältnisses dieses Durchmessers zu seinem Parameter (§. 367.). Ist q positiv, so gehört die Gleichung zur Hyperbel; die Abscissen-Linie ist ein Durchmesser, der zwischen die Asymptoten fällt, p dessen Parameter, und q das Verhältniß dieses Durchmessers zum Parameter (§. 410.).

* §. 427.

Wenn man die Abscissen auf derjenigen Seite des Anfangspunctes negativ annimmt, auf welcher sie in der Gleichung $y^2 = px + qx^2$ (§. 426.) positiv vorausgesetzt sind, so ist in derselben $-x$ statt $+x$ zu setzen; daher verwandelt sich die Gleichung in

$y^2 = -px + qx^2$.

Unter eben derselben Annahme wird aus der Gleichung $x'y' = q^2$ für die Hyperbel zwischen den Asymptoten (§. 402.),

$x'y' = -q^2$.

Gleichungen von der Form: $y^2 = -px + qx^2$ und $xy = -q^2$ gehören daher ebenfalls zu Kegelschnitten.

III. Abschnitt.

Von den Linien der zweyten Ordnung überhaupt.

* §. 428.

Wenn in der Gleichung einer Linie der zweyten Ordnung die Quadrate der veränderlichen Größen fehlen, so ist dieselbe unter der Form $Axy + Cy + Dx + E = 0$ enthalten, (§. 236.), in welchem Falle nicht auch $A = 0$ seyn kann, weil sonst die Linie nur von der ersten Ordnung wäre.

Um daraus eine andere Gleichung eben derselben Linie in Beziehung auf eine andere, zur vorigen parallele Abscissen-Linie zu finden, setze man, wenn f und g die Coordinaten des neuen Anfangspunctes sind, und der Coordinaten-Winkel unverändert bleiben soll, $x = x' + f$ und $y = y' + g$ (§. 233.), und substituire in $A\,x\,y + C\,y + D\,x + E = o$, so erhält man

$$A\,x'y' + (A\,f + C)\,y' + (A\,g + D)\,x' + A\,f\,g + C\,g + D\,f + E = o.$$

Nun lassen sich für f und g immer solche Werthe annehmen, daß $A\,f + C = o$, und $A\,g + D = o$ wird, und also die ersten Potenzen der veränderlichen Grösßen verschwinden; man darf nämlich nur $f = -\frac{C}{A}$ und $g = -\frac{D}{A}$ setzen, so wird die Gleichung in

$$A\,x'y' + \frac{A\,E - C\,D}{A} = o$$ verwandelt, woraus

$$x'\,y' = \frac{C\,D - A\,E}{A^2}$$ folgt.

Jede Linie der zweyten Ordnung, in deren Gleichung die Quadrate der Coordinaten fehlen, ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten zu den Coordinaten-Linien, worauf die Gleichung bezogen ist, parallel sind.

Eine solche Linie kann, wie überhaupt jede, wofür man eine Gleichung hat, nach §. 228. punctweise beschrieben werden; allein, da man weiß, daß diese Linie eine Hyperbel ist, so kann man sie leichter nach einer von den §. 390., 391. u. 416. angegebenen Methoden zeichnen.

Es sey z. B. $2\,x\,y + 5\,y - 4\,x + 1 = o$ die gegebene Gleichung, so ist $A = 2$, $C = 5$, $D = -4$ und $E = 1$; aus welchen Werthen, $f = -\frac{5}{2}$, $g = 2$, und $\frac{C\,D - A\,E}{A^2} = -\frac{11}{2}$ folgt.

Man ziehe (Fig. 25.) zwey gerade Linien X'X und Y'Y unter dem Winkel Y A X, welcher als Coordinaten-Winkel gegeben ist, nehme diese Linien als Coordinaten-Linien, mithin ihren Durchschnitt A als Anfangspunct, die Abscissen nach der Richtung A X, und die Ordinaten nach der Richtung A Y positiv.

Auf A X′ mache man A B = $\frac{5}{2}$, und B A′ = 2 nach der zu Y′Y parallelen Richtung B W auf der Seite der positiven Ordinaten, nach einem willkürlichen oder gegebenen Längenmaße, welches dann auch das Maß für x und y ist.

Zieht man hierauf durch A′ die Linie V′V # X′X, so sind V′V und W′W die Asymptoten derjenigen Hyperbel, wozu die gegebene Gleichung gehört, und deren Potenz = $\frac{1}{2}$ ist, wenn man die Abscissen auf der Asymptote V′V nach der Richtung A′V′ positiv nimmt (§. 427.).

Weil auch die Ordinaten nach der Richtung A′W positiv sind, so fällt die Hyperbel zwischen die Schenkel der Winkel V′A′W und W′A′V; man bedarf daher nur noch Eines Punctes der Hyperbel, um dieselbe nach §. 416. beschreiben zu können.

Zu diesem Zwecke kann man in der gegebenen Gleichung x = o setzen, so wird y = $-\frac{1}{5}$; also ist D ein Punct der Hyperbel, wenn man A D = $\frac{1}{5}$ auf A Y′ abschneidet.

Will man aber diese Hyperbel nach §. 390. oder nach §. 391. beschreiben, so muß man zuerst die Stellen der Brennpuncte nebst der Größe der Querachse finden. Da die Potenz = $\frac{1}{2}$ ist, so ist die halbe Excentricität = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 400.); man halbire daher den Asymptoten-Winkel V′A′W, um die Lage der Querachse zu erhalten (§. 396.), und schneide auf der Theilungslinie, A′F = A′F′ = $\sqrt{2}$ ab, so sind F und F′ die Brennpuncte.

Endlich mache man auf A V′, A′G = A′F, ziehe GH auf FF′ senkrecht, und nehme A′I = A′H, so sind H und I die Scheitel der Querachse (§. 398.).

* §. 429.

Fehlt in der Gleichung einer Linie der zweyten Ordnung das Quadrat der einen veränderlichen Größe, das der andern aber nicht, so kann man immer die Coordinaten-Linie, welche die Richtung derjenigen von den beyden Coordinaten bestimmt, deren Quadrat in der Gleichung fehlt, als Abscissen-Linie an-

nehmen. Dadurch bekömmt die Gleichung eine Form, in welcher y^2 nicht fehlt; sie ist also noch unter
$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = o$ begriffen (§. 236.), und dabey $B = o$.

* §. 430.

Da jede Gleichung mit zwey veränderlichen Größen nur dann die Gleichung einer Linie ist, wenn für gewisse stetig auf einander folgende Werthe der einen, die andere immer mögliche Werthe erhält (§. 227.), so muß man vor Allem untersuchen, ob die Gleichung
$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = o$ immer zu einer Linie gehöre, oder ob auch das Gegentheil Statt haben könne.

Aus dieser Gleichung ist

$$y = -\tfrac{1}{2}(Ax + C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2D)x + (C^2 - 4E)},$$

und y ist möglich oder unmöglich, je nachdem die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv oder negativ ist.

1) Wenn $A^2 - 4B$ positiv ist, so ist das erste Glied $(A^2 - 4B)x^2$ immer positiv, es mag x positiv oder negativ seyn.

Ferner kann man x immer so groß annehmen, daß dieses Glied größer wird als die Summe der beyden folgenden (§. 48.); und es bleibt auch größer, wenn man x noch größere Werthe gibt. Die Gleichung enthält also bey positivem Werthe von $A^2 - 4B$ mögliche Werthe von y, sowohl bey positiven als bey negativen Werthen von x; daher gehört sie zu einer Linie.

2) Ist $A^2 - 4B = o$, so kann man, wenn $AC - 2D$ nicht Null ist, x immer so nehmen, daß $2(AC - 2D)x$ positiv und dabey $> C^2 - 4E$, also y möglich wird; die Gleichung gehört daher zu einer Linie.

3) Für $A^2 - 4B = o$ und $AC - 2D = o$ wird aber $y = -\tfrac{1}{2}(Ax + C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{C^2 - 4E}$; also ist y bey jedem Werthe von x entweder unmöglich oder möglich, je nachdem $C^2 - 4E$ negativ oder positiv ist.

Die Gleichung gehört also nur im letzten Falle zu einer Linie, und zwar zu einem Systeme zweyer geraden Linien, deren Gleichungen

$$y = -\tfrac{1}{2}Ax - \tfrac{1}{2}(C - \sqrt{C^2 - 4E}) \text{ und}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}Ax - \tfrac{1}{2}(C + \sqrt{C^2 - 4E}) \text{ sind.}$$

Die Differenz der Ordinaten dieser Linien für einerley Abscisse ist $= \sqrt{C^2 - 4E}$, also beständig; mithin gehört die Gleichung zu einem Systeme zweyer parallelen geraden Linien, wenn $A^2 - 4B = 0$, $AC - 2D = 0$ und $C^2 - 4E$ positiv ist.

4) Wenn endlich $A^2 - 4B$ negativ ist, so bleibt das erste Glied $(A^2 - 4B)x^2$ bey jedem Werthe von x negativ; da man aber x immer so klein annehmen kann, daß das Glied $(C^2 - 4E)$ die Summe der beyden übrigen, $2(AC - 2D)x$ und $(A^2 - 4B)x^2$ übertrifft (§. 97.), so gibt es Werthe von x, für welche y möglich wird, wenn $C^2 - 4E$ positiv ist; die Gleichung gehört also dann zu einer Linie.

Ist aber nebst $A^2 - 4B$ auch $C^2 - 4E$ negativ, so ist nicht nur bey so kleinen Werthen von x, für welche $C^2 - 4E$ größer als $(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2D)x$, sondern auch bey so großen Werthen von x, für welche $(A^2 - 4B)x^2$ größer als $2(AC - 2D)x + (C^2 - 4E)$ ist, y unmöglich.

Um zu finden, ob in diesem Falle y immer unmöglich sey oder nicht, suche man die äußersten Werthe der Größe $(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2D)x + (C^2 - 4E) = z$.

Man findet

$$\frac{dz}{dx} = 2(A^2 - 4B)x + 2(AC - 2D);$$ und die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = 0,$$ nämlich $2(A^2 - 4B)x + 2(AC - 2D) = 0$

enthält diejenigen Werthe von x, für welche z ein Größtes oder Kleinstes wird (§. 175.).

Da diese Gleichung vom ersten Grade ist, so gibt es nur

Einen solchen Werth von x, nämlich $x = -\frac{AC - 2D}{A^2 - 4B}$.

Weil $\frac{d^2 z}{dx^2} = 2(A^2 - 4B)$, mithin negativ ist, so wird bey dem vorhergehenden Werthe von x, z ein Größtes (§. 171.), und dieser größte Werth von z ist =

$$\frac{(AC - 2D)^2 - (C^2 - 4E)(A^2 - 4B)}{-(A^2 - 4B)}.$$

Es seyen nun die Coefficienten A, B, C... so beschaffen, daß $(AC - 2D)^2 - (C^2 - 4E)(A^2 - 4B)$ positiv wird, so ist der größte Werth von z positiv; die Werthe von z, welche zunächst größern und kleinern Werthen von x zugehören, sind also auch positiv; mithin gibt es auf einander folgende Werthe von x, bey welchen y möglich ist, und daher gehört die Gleichung zu einer Linie.

Wenn aber $(AC - 2D)^2 - (C^2 - 4E)(A^2 - 4B)$ negativ ist, so ist der größte Werth von z negativ, und z bleibt bey jedem Werthe von x negativ; denn die Werthe von z, welche unmittelbar größern und kleinern Werthen von x, als $-\frac{AC - 2D}{A^2 - 4B}$ zugehören, sind in diesem Falle nur größere negative Werthe, als $\frac{(AC - 2D)^2 - (C^2 - 4E)(A^2 - 4B)}{-(A^2 - 4B)}$ ist (§. 172.), und diese negativen Werthe von z müssen immer mehr zunehmen, je mehr x von $-\frac{AC - 2D}{A^2 - 4B}$ unterschieden ist, weil im entgegen gesetzten Falle, z außer dem angegebenen noch äußerste Werthe hätte, welches nicht der Fall ist.

Wegen dieser beständig negativen Werthe von z ist demnach y bey keinem Werthe von x möglich; daher gehört die Gleichung zu keiner Linie.

Für $(AC - 2D)^2 - (C^2 - 4E)(A^2 - 4B) = 0$ wird der größte Werth von z, $= 0$; mithin alle übrigen negativ; die Gleichung ist also die eines Punctes, dessen Coordinaten, $x = -\frac{AC - 2D}{A^2 - 4B}$, und $y = -\frac{AD - 2BC}{A^2 - 4B}$ sind, weil

bey allen übrigen Werthen von x, z negativ, folglich y unmöglich wird.

* §. 431.

Nach den Sätzen des vorhergehenden §. kann also auf folgende Art untersucht werden, ob y in einer Gleichung von der Form: $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = o$ immer unmöglich sey:

Man suche y aus der Gleichung, so bekömmt man im Ausdrucke für y eine Wurzelgröße, in welcher nach gehöriger Reduction nur Ein Glied mit x^2, Eines mit x, und Ein beständiges Glied vorkommen können.

Wenn der Coefficient von x^2 negativ ist, so multiplicire man denselben mit dem beständigen Gliede, und ziehe das Product vom Quadrate des halben Coefficienten von x ab.

Wird die Differenz negativ, so ist y immer unmöglich; wird sie aber $= o$, so gibt es einen Werth von x, bey welchem die Größe unter dem Wurzelzeichen selbst Null wird, und y ist nur für diesen Werth von x möglich.

Außer dem wird y noch dann unmöglich, wenn die Coefficienten von x^2 und x in der Wurzelgröße zugleich fehlen, und das beständige Glied negativ ist. Diesen Fall zeigt aber sogleich die Form des für y gefundenen Werthes an.

In allen andern Fällen ist y für stetig auf einander folgende Werthe von x möglich, und in solchen Fällen gehört also die Gleichung zu einer Linie.

Es ist z. B. aus den Gleichungen:

1) $y^2 + 3xy + 7x^2 + 2y - x + 5 = o$,

$y = -\frac{1}{2}(3x + 2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-19x^2 + 16x - 16}$,

also $(\frac{16}{2})^2 - (-19 \times -16) = -240$.

2) $y^2 + 2xy + 2x^2 - 6y + 4x + 34 = o$,

$y = -(x - 3) \pm \sqrt{-x^2 - 10x - 25}$,

daher $(-\frac{10}{2})^2 - (-1 \times -25) = o$.

3) $y^2 - 10xy + 25x^2 - y + 5x + 1 = o$,

$y = \frac{1}{2}(10x + 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

In der ersten und dritten Gleichung ist also y immer unmöglich; in der zweyten aber ist y nur bey jenem Werthe von x möglich, bey welchem $-x^2-10x-25=0$ wird; also für $x=-5$, wofür $y=+8$ ist.

Keine von diesen drey Gleichungen gehört demnach zu einer Linie.

* §. 432.

Wenn eine Gleichung von der Form:
$y^2+Axy+Bx^2+Cy+Dx+E=0$ zu einer Linie gehört, so muß man, um die Eigenschaften dieser Linie leichter finden zu können, die Gleichung so einfach als möglich zu machen suchen.

Fig. 26. Es sey M ein Punct dieser Linie, AX die Abscissen-Linie, AY die Ordinaten-Linie, also $YAX=\alpha$ der Coordinaten-Winkel; ferner seyen $AP=x$ und $MP=y$ die Coordinaten des Punctes M.

Nimmt man eine andere gerade Linie AZ, die in A mit AX einen Winkel $ZAX=\gamma$ macht, ohne den Anfangspunct und die Richtung der Ordinaten zu verändern, als Abscissen-Linie; so sind auf dieser Abscissen-Linie, $AP'=x'$, und $MP'=y'$ die Coordinaten von M, und es ist (§. 233.)

$$y=y'+\frac{x'\sin\gamma}{\sin\alpha},\ \text{und}\ x=\frac{x'\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha};$$

die gegebene Gleichung verwandelt sich daher in

$$y'^2+\left(\frac{2\sin\gamma+A\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}\right)x'y'+$$

$$\left(\frac{\sin^2\gamma+A\sin\gamma\sin(\alpha-\gamma)+B\sin^2(\alpha-\gamma)}{\sin^2\alpha}\right)x'^2+Cy'$$

$$+\left(\frac{C\sin\gamma+D\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}\right)x'+E=0,\ \text{oder in}$$

$y'^2+A'x'y'+B'x'^2+Cy'+D'x'+E=0$, wenn man die Coefficienten von $x'y'$, von x'^2, und von x' mit A', B' und D' bezeichnet.

* §. 433.

Setzt man A', und mithin $2 \sin \gamma + A \sin (\alpha - \gamma) = 0$, so ist daraus $\text{tang}\, \gamma = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha - 2}$.

Da dem gefundenen Ausdrucke zu Folge, γ einen bestimmten möglichen Werth erhält, was auch A und α für Werthe haben mögen, so kann immer die Voraussetzung: $A' = 0$ angenommen, und mithin die gegebene Gleichung so verändert werden, daß das Product der veränderlichen Größen verschwindet, wodurch sie einfacher wird, weil sie um ein veränderliches Glied weniger enthält.

* §. 434.

Aus $\text{tang}\, \gamma = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha - 2}$ ist $\sin \gamma = \frac{\text{tang}\, \gamma}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \gamma}}$

$= \frac{A \sin \alpha}{\sqrt{A^2 - 4 A \cos \alpha + 4}}$, oder, wenn der Kürze wegen $\sqrt{A^2 - 4 A \cos \alpha + 4}$ mit R bezeichnet wird, $\sin \gamma = \frac{A \sin \alpha}{R}$.

Dabey ist zu bemerken, daß R als der Werth von $\frac{A \sin \alpha}{\sin \gamma}$ immer möglich ist.

Ferner findet man leicht aus $2 \sin \gamma + A \sin (\alpha - \gamma) = 0$, woraus der Werth von $\text{tang}\, \gamma$ abgeleitet wurde, $\sin (\alpha - \gamma) = -\frac{2 \sin \gamma}{A} = -\frac{2 \sin \alpha}{R}$, und mithin $\frac{\sin (\alpha - \gamma)}{\sin \alpha} = -\frac{2}{R}$.

Daher wird $B' = -\frac{A^2 - 4B}{R^2}$, $D' = \frac{AC - 2D}{R}$, und es ist folglich

$y'^2 - \frac{(A^2 - 4B)}{R^2} x'^2 + C y' + \frac{AC - 2D}{R} x' + E = 0$ die verwandelte Gleichung für den vorstehenden Werth von tang. γ.

* §. 435.

Man nehme A′V # AZ als Abscissen-Linie, den Durchschnitt A′ dieser Linie mit AY als Anfangspunct, und lasse die Richtung der Ordinaten wieder unverändert, so sind $A'P'' = AP' = x'$, und $MP'' = MP' - AA' = y' - f$ (wenn AA′ mit f bezeichnet wird) $= y''$ die Coordinaten von M; und man bekömmt für dieses Coordinaten-System die Gleichung

$$y''^2 - \frac{(A^2 - 4B)}{R^2} x'^2 + (2f + C) y'' + \frac{AC - 2D}{R} x'$$

$$+ (f^2 + Cf + E) = 0.$$

Es darf also nur $2f + C = 0$ gesetzt, und daher $f = -\frac{1}{2}C$ genommen werden, damit aus dieser Gleichung das Glied: $(2f + C)y''$ verschwinde, wodurch sie noch einfacher wird.

Die Gleichung ist dann

$$y''^2 - \frac{(A^2 - 4B)}{R^2} x'^2 + \frac{(AC - 2D)}{R} x' + (E - \tfrac{1}{4}C^2) = 0.$$

* §. 436.

Wenn man endlich einen andern Anfangspunct A″ auf der Abscissen-Linie A′V annimmt, so sind, $A'A'' = g$ gesetzt, $A''P'' = x'' = x' - g$ und $MP'' = y''$ die Coordinaten des Punctes M, für welche man aus der vorhergehenden, die Gleichung

$$y''^2 - \frac{(A^2 - 4B)}{R^2} x''^2 - \left[2\frac{(A^2 - 4B)}{R^2} g - \frac{(AC - 2D)}{R}\right] x''$$

$$- \left[\frac{(A^2 - 4B)}{R^2} g^2 - \frac{(AC - 2D)}{R} g - (E - \tfrac{1}{4}C^2)\right] = 0$$

erhält.

Soll das beständige Glied aus dieser Gleichung verschwinden, so muß

$$g = \frac{R}{2(A^2 - 4B)}\left[AC - 2D \pm \sqrt{(AC - 2D)^2 - (A^2 - 4B)(C^2 - 4E)}\right]$$

genommen werden, und die Gleichung wird bey diesem Werthe von g,

$$y''^2 - \frac{(A^2 - 4B)}{R^2} x''^2 + \frac{1}{R}\sqrt{(AC - 2D)^2 - (A^2 - 4B)(C^2 - 4E)} \cdot x''$$

$$= 0.$$

* §. 437.

Der so eben für g gefundene Werth zeigt an, daß g unmöglich werde, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist; dieses kann nicht nur bey negativem Werthe von $A^2 - 4B$, in welchem Falle die Gleichung zu keiner Linie gehört (§. 430.), sondern auch bey positivem Werthe von $A^2 - 4B$ eintreffen; die gegebene Gleichung kann alsdann nach der angegebenen Methode nicht auf die zuletzt gefundene Form gebracht werden.

Es ist aber aus der Gleichung:

$$y'^2 - \frac{(A^2-4B)}{R^2}x'^2 + Cy' + \frac{(AC-2D)}{R}x' + E = 0 \text{ (§. 434.)},$$

$$y' = -\tfrac{1}{2}C \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4(A^2-4B)}{R^2}x'^2 - \frac{4(AC-2D)}{R}x' + (C^2-4E)},$$

$$\text{und } x' = \frac{(AC-2D)R}{2(A^2-4B)} \pm \frac{R}{2(A^2-4B)}\,X$$

$$\sqrt{4(A^2-4B)y'^2 + 4(A^2-4B)Cy' + (AC-2D)^2 + 4(A^2-4B)E}.$$

Wenn man nun mit der Größe unter dem Wurzelzeichen sowohl im Werthe von y', als auch im Werthe von x' so verfährt, wie man nach §. 431. verfahren muß, um zu untersuchen, ob die Gleichung zu einer Linie gehöre, so findet man die nach diesem §. zu bestimmende Differenz aus der erstern Größe, $= \frac{4}{R^2}[(AC-2D)^2 - (A^2-4B)(C^2-4E)]$, und aus der letztern, $= -4(A^2-4B)[(AC-2D)^2 - (A^2-4B)(C^2-4E)]$; sobald daher die erstere von diesen beyden Differenzen negativ ist, so wird bey positivem Werthe von $(A^2 - 4B)$ die letztere positiv.

* §. 438.

Da bey negativem Werthe der aus y' bestimmten Differenz, g unmöglich, bey positivem aber möglich wird, und da ferner im erstern Falle diese Differenz aus x' bestimmt, möglich wird, sobald $A^2 - 4B$ positiv ist, also die Gleichung zu einer Linie gehört: so darf man nur die Coordinaten x' und y'

verwechseln, nämlich A Y als Abscissen-Linie, A Z als Ordinaten-Linie annehmen, und dann wie zuvor verfahren, um auch in diesem Falle mögliche Werthe für g zu erhalten.

Man findet dann $f = \frac{(AC - 2D)R}{2(A^2 - 4B)}$, $g =$

$$-\tfrac{1}{2}C \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(A^2-4B)(C^2-4E)-(AC-2D)^2}{A^2-4B}},$$ und die Gleichung:

$$y''^2 - \frac{R^2}{A^2-4B}x''^2 \mp \frac{R^2}{A^2-4B}\sqrt{\frac{(A^2-4B(C^2-4E)-(AC-2D)^2}{A^2-4B}} = 0.$$

* §. 439.

Wenn $A^2 - 4B = 0$ ist, so wird die Gleichung $\frac{(A^2-4B)}{R^2}g^2 - \frac{(AC-2D)}{R}g - (E - \frac{1}{4}C^2) = 0$, durch welche g bestimmt wird (§. 436.):

$\frac{(AC-2D)}{R}g + (E - \frac{1}{4}C^2) = 0$, mithin $g = \frac{(C^2-4E)R}{4(AC-2D)}$;

g bekömmt also für $A^2 - 4B = 0$ nur Einen bestimmten Werth.

* §. 440.

Die Gleichung $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0$ läßt sich daher immer, sobald sie zu einer Linie gehört, in eine andere von der Form: $y''^2 - qx''^2 - px'' = 0$, oder $y''^2 = px'' + qx''^2$ verwandeln; jede Linie der zweyten Ordnung ist also ein Kegelschnitt, wofür p der Parameter des Durchmessers, auf welchem die Abscissen genommen sind, und q das Verhältniß dieses Durchmessers zu seinem Parameter ist (§. 426. 427.).

* §. 441.

Nach der Gleichung (§. 436.) ist

$$p = \pm\frac{1}{R}\sqrt{(AC-2D)^2-(A^2-4B)(C^2-4E)} \text{ und } q = \frac{A^2-4B}{R^2};$$

also ist die Linie eine Parabel, wenn $(A^2 - 4B) = o$, eine Ellipse, wenn $(A^2 - 4B)$ negativ, und eine Hyperbel, wenn $(A^2 - 4B)$ positiv ist (§. 426.).

Sollte aber bey positivem Werthe von $A^2 - 4B$, $(AC - 2D)^2 - (A^2 - 4B)(C^2 - 4E)$ negativ seyn, so ist nach der Gleichung (§. 438.),

$$p = \pm \frac{R^2}{A^2 - 4B} \sqrt{\frac{(A^2 - 4B)(C^2 - 4E) - (AC - 2D)^2}{A^2 - 4B}}, \text{ und}$$

$q = \frac{R^2}{A^2 - 4B}$; also ist die Linie ebenfalls eine Hyperbel, wie in dem Falle, in welchem die Quadrate der beyden veränderlichen Größen der Gleichung fehlen (§. 428.).

* §. 442.

Da man zwey Werthe für g erhält, wenn die Gleichung nicht zur Parabel gehört, welche Werthe diese Gleichung auf die Form $y''^2 = p\,x'' + q\,x''^2$ bringen, so bestimmen diese beyden Werthe die Stellen der beyden Scheitel der Ellipse oder der Hyperbel, und mithin auch die Stelle ihres Mittelpunctes.

Nimmt man jenen Werth von g, mit welchem der negative Werth von p zusammen gehört, so müssen die Abscissen nach der entgegen gesetzten Richtung positiv genommen werden, damit das erste Glied der Gleichung $y^2 = p\,x'' + q\,x''^2$, nämlich $p\,x''$ positiv werde (§. 427.).

* §. 443.

Um die Gleichung: $y^2 + A\,x\,y + B\,x^2 + C\,y + D\,x + E = o$ einer Linie der zweyten Ordnung auf die Form $y''^2 = p\,x'' + q\,x''^2$ zu bringen, darf also nur

1.) durch die Veränderung der Lage der Abscissen-Linie mit Beybehaltung des Anfangspunctes und der Richtung der Ordinaten das Glied, welches $x\,y$ enthält (§. 433.),

2.) durch die Annahme einer zu dieser parallelen Abscissen-Linie, ohne die Ordinaten-Linie zu verändern, das Glied mit y (§. 435.), und

3.) durch Versetzung des Anfangspunctes das beständige Glied aus der Gleichung weggeschafft werden (§. 436.).

Die in §. 431. angegebene Untersuchung, ob nämlich $(AC-2D)^2-(A^2-4B)(C^2-4E)$ positiv oder negativ sey, muß sowohl bey positivem als bey negativem Werthe von A^2-4B vorgenommen werden; im letzten Falle, um versichert zu werden, ob die Gleichung zu einer Linie gehöre, und im vorhergehenden, weil man sogleich nach Wegschaffung des Gliedes mit xy (nro. 1.), die Coordinaten-Linien verwechseln muß, wenn $(AC-2D)^2-(A^2-4B)(C^2-4E)$ negativ ist (§. 438.). Nur wenn $A^2-4B=0$ ist, wäre es überflüssig, diese Untersuchung anzustellen.

Die beyden letzten Operationen (nro. 2. und 3.) können auch in Eine zusammen gefaßt werden, wenn man die nach nro. 1. gefundene Gleichung dergestalt verändert, daß sie sich auf eine parallele Abscissen-Linie bezieht, die Coordinaten des Anfangspunctes $=f$ und $=g$ setzt, und dieselben so bestimmt, daß das Glied mit y nebst dem beständigen Gliede aus der Gleichung verschwindet.

* §. 444.

Zur Erläuterung der vorhergehenden Sätze sey die Linie zu construiren, welcher die Gleichung

$y^2-xy+3x^2+4x-1=0$ bey rechtwinkligen Coordinaten zugehört. —

Daß diese Gleichung die einer Linie sey, zeigt der Werth von y; denn es ist

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{11}{4}x^2-4x+1}$, folglich

$(\frac{4}{2})^2-(-\frac{11}{4}\times 1)=+\frac{27}{4}$ (§. 431.). Da über dieß

$A^2-4B=(-1)^2-4.3=-11$, also negativ ist, so ist die Linie eine Ellipse (§. 441.).

Man setze, um xy wegzuschaffen,

$y=y'+x'\sin.\gamma$, und $x=x'\cos.\gamma$, weil der vorausgesetzte Coordinaten-Winkel $\alpha=90°$ ist (§. 233.).

Man erhält dadurch

$y'^2 + (2 \sin.\gamma - \cos.\gamma)\, x'\, y' + (\sin.^2\gamma - \sin.\gamma \cos.\gamma + 3\cos.^2\gamma)\, x'^2 + 4\cos.\gamma \,.\, x' - 1 = 0$,

und aus $2 \sin.\gamma - \cos.\gamma = 0$, $\text{tang.}\,\gamma = \frac{1}{2}$, also $\gamma = 26° 34'$.

Fig. 27. Es sey X′X die Abscissen-Linie für die gegebene Gleichung, und A der Anfangspunct. Man mache $Z A X = 26° 34'$, (welcher Winkel wegen $\text{tang.}\,\gamma = \frac{1}{2}$ sehr leicht zu construiren ist), so ist AZ die neue Abscissen-Linie.

Aus $\text{tang.}\,\gamma = \frac{1}{2}$ folgt $\sin.\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\cos.\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

mithin wird aus der vorhergehenden Gleichung,

$y'^2 + \frac{11}{5} x'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}} x' - 1 = 0$, wofür AZ die Abscissen-Linie, A der Anfangspunct, und $90° - \gamma = 63° 26'$ der Coordinaten-Winkel ist.

Da y′ in dieser Gleichung schon fehlt, so darf man nur noch, um das beständige Glied (— 1) wegzuschaffen, $x' = x'' + g$ setzen. Man bekömmt

$y'^2 + \frac{11}{5} x''^2 + \frac{2}{5}(11 g + 4\sqrt{5})\, x'' + (\frac{11}{5} g^2 + \frac{8}{\sqrt{5}} g - 1) = 0$,

und da das letzte Glied verschwinden soll, so muß $g = \frac{-4\sqrt{5} \pm 3\sqrt{15}}{11}$

genommen werden.

Für diese Werthe von g erhält man

$y'^2 + \frac{11}{5} x''^2 \pm \frac{6}{5}\sqrt{15} \,.\, x'' = 0$, oder

$y'^2 = \mp \frac{6}{5}\sqrt{15} \,.\, x'' - \frac{11}{5} x''^2$.

Die beyden angezeigten Werthe von g sind: 1) $g = + 0{,}24315$ und 2) $g = - 1{,}86938$; man mache daher $AD = 0{,}24315$, und $AB = 1{,}86938$, so sind D und B die Scheitel des Durchmessers AZ, folglich ist seine Größe $BD = a' = \frac{6}{11}\sqrt{15} = 2{,}11253$.

Da der Mittelpunct C der Ellipse den Durchmesser BD halbirt, so ist sein Abstand von A, $AC = 0{,}81311$.

Nimmt man den ersten Werth von g, so ist für Abscissen,

die vom Anfangspuncte D nach der Richtung D Z positiv genommen sind,
$y'^2 = -\frac{6}{5}\sqrt{15}.x'' - \frac{11}{5}x''^2$ die Gleichung; nimmt man aber den zweyten, so ist für Abscissen, welche vom Anfangspuncte B nach der Richtung B Z positiv genommen sind, die Gleichung:
$y'^2 = \frac{6}{5}\sqrt{15}.x'' - \frac{11}{5}x''^2$.

Wenn man im ersten Falle die Abscissen nach der angegebenen Richtung negativ, also nach der entgegen gesetzten A B, positiv nimmt, so werden beyde Gleichungen einerley. Man mag also die Abscissen von D nach der Richtung D B, oder von B nach der Richtung B D positiv nehmen, so ist immer $y'^2 = \frac{6}{5}\sqrt{15}.x'' - \frac{11}{5}x''^2$ die Gleichung der Linie, und die Richtung der Ordinaten auf X' X senkrecht.

Der Parameter p des Durchmessers B D ist also $= \frac{6}{5}\sqrt{15}$; aus diesem und aus a' folgt daher die Größe des vereinigten Durchmessers $b' = \sqrt{a'p} = \frac{6}{11}\sqrt{33} = 3,13340$.

Man nehme demnach in der auf X' X senkrechten Richtung H K, $CH = CK = 1,5667$, so ist H K die Größe und Richtung des Durchmessers, welcher mit B D zusammen gehört.

Aus dem bisher Gefundenen läßt sich nun die Ellipse nach §. 369. beschreiben.

Will man aber auch die Richtungen und Größen der beyden Achsen a und b finden, so erhält man nach §. 373., weil der daselbst mit ε bezeichnete Conjugations-Winkel D C K $= 90°$ $+ ZAX = 116° 34'$, und folglich dessen Sinus $= \cos.ZAX = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ist,

$$a = \frac{6}{11}\left[\sqrt{3(4+\sqrt{11})} + \sqrt{3(4-\sqrt{11})}\right] = 3,33648,$$

$$b = \frac{6}{11}\left[\sqrt{3(4+\sqrt{11})} - \sqrt{3(4-\sqrt{11})}\right] = 1,77450,$$

und für den Winkel γ', den der Durchmesser mit der großen Achse macht, findet man $\text{tang.}\gamma' = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{5}}$, also

$\gamma' = 50° 9'$, oder $\gamma' = 13° 17'$.

Die große Achse A' B' theilet also den Winkel H C D so, daß H C B' $= 13° 17'$ und B' C D $= 50° 9'$ wird (§. 348.).

Endlich ist $e = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}b)^2}$ (§. 352.) = 1,41274; folglich hat man die Stellen F und F′ der Brennpuncte, wenn man auf der großen Achse, $CF = CF' = 1{,}41274$ macht.

Nun kann die Ellipse auch nach §. 350. oder §. 356. und 357. beschrieben werden.

* §. 445.

Es sey $y^2 + 2{,}4\,xy + 1{,}44\,x^2 + 5{,}43\,y + 14{,}86 = 0$ die gegebene Gleichung, und der Coordinaten-Winkel $\alpha = 80°$. —

Da in dieser Gleichung, $A^2 - 4B = 2{,}4^2 - 4 \times 1{,}44 = 0$ ist, so gehört dieselbe zu einer Parabel (§. 441.).

Man setze, um xy wegzuschaffen,

$y = y' + \frac{x' \sin.\gamma}{\sin.\alpha}$ und $x = \frac{x' \sin.(\alpha - \gamma)}{\sin.\alpha}$, so bekömmt man

$$y'^2 + \left[\frac{2\sin.\gamma + 2{,}4\sin.(\alpha-\gamma)}{\sin.\alpha}\right] x'y'$$

$$+ \left[\frac{\sin.^2\gamma + 2{,}4\sin.\gamma\sin.(\alpha-\gamma) + 1{,}44\sin.^2(\alpha-\gamma)}{\sin^2\alpha}\right] x'^2$$

$$+ 5{,}43\,y' + 5{,}43\,\frac{\sin.\gamma}{\sin.\alpha}\,x' + 14{,}86 = 0,$$

und aus $\frac{2\sin.\gamma + 2{,}4\sin.(\alpha-\gamma)}{\sin.\alpha} = 0$, wird

tang. $\gamma = -1{,}49285$, mithin $\gamma = 123° 49'$, bey welchem Werthe von γ die vorhergehende Gleichung in

$y'^2 + 5{,}43\,y' + 4{,}581\,x' + 14{,}86 = 0$ verwandelt wird.

Fig. 28. Es sey X′X die Abscissen-Linie, A der Anfangspunct, und $YAX = 80° =$ dem vorausgesetzten Coordinaten-Winkel. Man mache $XAZ = 123° 49'$, so sind AZ und AY die Coordinaten-Linien für die letzte Gleichung; wobey die Abscissen nach der Richtung AZ, die Ordinaten aber nach der Richtung AY positiv sind.

Um y′ wegzuschaffen, setze man nun $y' = y'' + f$, so wird aus der vorhergehenden Gleichung,

$y''^2 + (2f + 5{,}43)\,y'' + 4{,}581\,x' + (f^2 + 5{,}43\,f + 14{,}86) = 0$;

also für $2f + 5,43 = 0$, $f = -2,715$ und $y''^2 + 4,581\,x' + 7,489 = 0$.

Man mache daher auf der Seite der negativen Ordinaten, $AA' = 2,715$ und ziehe $A'Z' \# AZ$, so sind $A'Z'$ und $A'Y$ die Coordinaten-Linien, auf welche sich die gefundene Gleichung bezieht.

Setzt man endlich, um das beständige Glied wegzuschaffen, $x' = x'' + g$, so wird

$y''^2 + 4,581\,x'' + (4,581\,g + 7,489) = 0$,

und für $4,581\,g + 7,489 = 0$, $g = -1,635$

und $y''^2 + 4,581\,x'' = 0$.

Macht man daher auf der Seite der negativen Abscissen, $A'A'' = 1,635$, so ist A'' der neue Anfangspunct, und man hat die Gleichung $y''^2 = -4,581\,x''$, wenn die Abscissen nach der Richtung $A''Z'$ positiv, oder $y''^2 = +4,581\,x''$, wenn dieselben nach dieser Richtung negativ, mithin nach der entgegen gesetzten $A''Z''$ positiv angenommen werden (§. 427.).

Es ist also $Z'Z''$ ein Durchmesser der Parabel, sein Parameter $p' = 4,581$, die Tangente seines Scheitels A'' zu $A'Y$ parallel (§. 333.), und der Coordinaten-Winkel $= Z'A'Y = \gamma - \alpha = 43^\circ\,49'$.

Man erhält daher nach §. 335. den Parameter der Achse, $p = p' \sin.^2 43^\circ\,49' = 2,196$; den Abstand der Achse vom Durchmesser, $b = \frac{1}{2}\sqrt{p\,(p' - p)} = 1,144$, und die Abscisse des Scheitels A'' auf der Achse genommen, $a = \frac{1}{4}(p' - p) = 0,596$.

Man ziehe $A''B = 1,144$ senkrecht auf $Z'Z''$, durch B die Linie $EG \# Z'Z''$, und mache darauf $BD = 0,596$, so ist EG die Achse, D ihr Scheitel, und wenn man $DF = \frac{1}{4}p = 0,549$ nimmt, F der Brennpunct der Parabel; woraus sich nun diese Parabel construiren läßt (§. 325. 326.).

Ueber die Richtungen, nach welchen $A''B$ und BD aufgetragen werden müssen, läßt die Lage der Ordinaten keinen Zweifel übrig.

* §. 446.

Durch fünf Werthe von x nebst den zugehörigen Werthen von y sind die Coefficienten A, B, C . . . in der Gleichung $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = o$ bestimmt, und mithin die Linie, wozu die Gleichung gehört; denn vermittelst dieser Werthe bekömmt man fünf Gleichungen zwischen diesen Coefficienten, für welche man immer mögliche Werthe erhalten muß, weil diese Gleichungen in Beziehung auf die unbekannten Größen A, B, C . . . einfach sind.

Durch fünf Puncte ist daher eine Linie der zweyten Ordnung bestimmt; denn wenn man in der Ebene dieser Puncte eine gerade Linie als Abscissen-Linie, und einen beliebigen Coordinaten-Winkel annimmt, so sind die Coordinaten dieser Puncte bestimmt, wenn die Lage der letztern gegen einander und gegen die Abscissen-Linie bestimmt ist.

* §. 447.

Fig. 29. Es seyen M^I, M^{II}, M^{III}, M^{IV}, M^V, fünf Puncte in einer Ebene, deren gegenseitige Lage gegeben ist, und es sey die Linie der zweyten Ordnung zu construiren, in welcher diese fünf Puncte liegen. —

Um die Auflösung möglichst einfach zu machen, kann man die gerade Linie X′X durch zwey von diesen Puncten: M^I und M^{IV} als Abscissen-Linie, den einen davon, M′ als Anfangspunct annehmen, und die Ordinaten-Linie M′Y durch einen von den übrigen Puncten, z. B. durch M″ ziehen.

Zieht man dann durch die beyden übrigen Puncte, M^{III} P und M^V P′ zu M′Y parallel, so hat man die Coordinaten aller dieser Puncte.

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser Puncte mag nun auf was immer für eine Art gegeben seyn, so lassen sich daraus immer die Größen ihrer Coordinaten nebst der Lage der letztern gegen die angenommene Abscissen-Linie finden.

Es sey z. B. $YM'X = 60°$, $M'M'' = 10$, $M'P = 3$, $M^{III}P = 9$, $M'M^{IV} = 8$, $M'P' = 10$, und auf der entgegen gesetzten Seite von $X'X$, $M^{V}P' = 2$; so ist

für M', $x = 0$, $y = 0$, mithin $E = 0$;

= M'', $x = 0$, $y = 10$, = $100 + 10C = 0$;

= M''', $x = 3$, $y = 9$, =

$$81 + 27A + 9B + 9C + 3D = 0;$$

= M^{IV}, $x = 8$, $y = 0$, = $64B + 8D = 0$;

= M^{V}, $x = 10$, $y = -2$, =

$$4 - 20A + 100B - 2C + 10D = 0;$$

aus welchen Gleichungen, $A = -0{,}75$; $B = -1{,}95$; $C = -10$; $D = 15{,}6$ gefunden wird.

Die Gleichung der Linie, welche durch diese Puncte geht, ist also

$y^2 - 0{,}75xy - 1{,}95x^2 - 10y + 15{,}6x = 0$, und da $A^2 - 4B = (-0{,}75)^2 + 4.\ 1{,}95$ positiv ist, so ist die gesuchte Linie eine Hyperbel (§. 441.).

Behält man die zuvor gebrauchten Bezeichnungen bey, so findet man den Werth von γ, bey welchem xy verschwindet, $= 15°\ 18'$, und die Gleichung:

$y'^2 - 1{,}379x'^2 - 10y' + 9{,}625x' = 0$, für die Ordinaten-Linie $M'Y$ und die Abscissen-Linie $M'Z$, wenn $ZM'X = 15°\ 18'$ gemacht wird.

Da aus der gegebenen Gleichung,

$y = 0{,}375x + 5 \pm \sqrt{2{,}091x^2 - 11{,}85x + 25}$ folgt, mithin $\left(-\frac{11{,}85}{2}\right)^2 - 2{,}091 \times 25$ negativ ist, so verwechsle man die Coordinaten-Linien AY und AZ (§. 438.).

Wenn man also die Abscissen auf $M'Y$ mit X, und die Ordinaten parallel zu $M'Z$ genommen, mit Y bezeichnet, so ist $y' = X$ und $x' = Y$, welches die Gleichung:

$Y^2 - 0{,}725X^2 - 6{,}98Y + 7{,}252X = 0$ gibt.

Dann findet man für $Y = y'' + f$,

$f = 3{,}49$ und $y''^2 - 0{,}725X^2 + 7{,}252X - 12{,}18 = 0$;

und endlich für $X = x'' + g$, $g = 5 \mp 2,864$, und
$y''^2 - 0{,}725\, x''^2 \mp 4{,}153\, x'' = 0$.

Man mache auf M'Z, $M'A = 3{,}49$, ziehe $AZ' \# M'Y$, und schneide auf dieser Linie, $AB = 5 + 2{,}864 = 7{,}864$, AD aber $= 5 - 2{,}864 = 2{,}136$ ab, so sind B und D die Scheitel des Durchmessers, dessen Größe $DB = a' = 5{,}728$, und dessen vereinigter zu M'Z parallel ist; der Punct C, welcher BD halbirt, ist also der Mittelpunct.

Nimmt man B als Anfangspunct, so ist $y''^2 - 0{,}725\, x''^2 - 4{,}153\, x'' = 0$ die Gleichung dieser Hyperbel; wird aber D als Anfangspunct angenommen, so ist die Gleichung:
$y''^2 - 0{,}725\, x''^2 + 4{,}153 = 0$.

Die Abscissen sind in jedem Falle nach der Richtung BZ' oder DZ' positiv; wenn aber dieselben im letztern nach der entgegen gesetzten Richtung DA positiv angenommen werden, so ist wie im erstern, $y''^2 - 0{,}725\, x''^2 - 4{,}153\, x'' = 0$, oder $y''^2 = 4{,}153\, x'' + 0{,}725\, x''^2$ die Gleichung dieser Hyperbel.

Der Parameter p des Durchmessers DB ist also $= 4{,}153$, und $q = \frac{p}{a'} = 0{,}725$; folglich ist die Größe des vereinigten Durchmessers $b' = \sqrt{a'\, p} = 4{,}877$.

Zieht man durch D, $GH \# M'Z$, so ist GH die Tangente des Punctes D (§. 411.), und wenn man $DG = DH = \frac{1}{2} b' = 2{,}4385$ macht, so sind G und H die Durchschnitte dieser Tangente mit den Asymptoten (§. 414.), wodurch also die Lage der letztern gefunden ist. Die Hyperbel kann nun nach §. 416 punctweise beschrieben werden.

Wollte man die Lage und Größe der Achsen nebst den Stellen der Brennpuncte angeben, so könnte dieses auf ähnliche Weise wie im Beyspiele (§. 444.) vermittelst der Gleichungen (§. 418.) bewerkstelliget werden.

* §. 448.

Wenn von den 5 gegebenen Puncten drey in einer geraden Linie liegen, so kann man immer diese Linie als Abscissen-Li-

nie, einen von den drey Puncten in ihr als Anfangspunct annehmen, und die Ordinaten-Linie durch einen von den beyden übrigen Puncten ziehen.

Für jeden der drey Puncte in der Abscissen-Linie ist also $y = o$, für den Anfangspunct ist auch $x = o$, so wie für den Punct, welcher die Lage der Ordinaten-Linie bestimmt.

Bezeichnet man die Abscissen der beyden andern Puncte in der Abscissen-Linie mit a und b, die Ordinate des Punctes, welcher in der Ordinaten-Linie liegt, mit f, und die Coordinaten des noch übrigen Punctes mit c und g, so erhält man für die Coefficienten A, B, C... die Werthe: $A = \frac{f-g}{c}$, $B = o$, $C = -f$, $D = o$, und $E = o$, also die Gleichung:

$$y^2 + \frac{(f-g)}{c} xy - fy = o, \text{ oder } y(y + \frac{(f-g)}{c} x - f) = o.$$

Die Linie der zweyten Ordnung durch diese fünf Puncte ist also ein System zweyer geraden Linien, deren Gleichungen: $y = o$, und $y + \frac{(f-g)}{c} x - f = o$ sind (§. 240.). Die eine davon ist daher die Abscissen-Linie selbst, und die andere ist die gerade Linie, welche durch die beyden Puncte geht, deren Ordinaten f und g sind.

* §. 449.

Zur Bestimmung einer Linie der zweyten Ordnung sind weniger als fünf Puncte hinreichend, wenn außer diesen noch andere Bestimmungsgründe gegeben sind; so findet man z. B., daß durch zwey Puncte nebst der Lage der Achse gegen diese Puncte eine Parabel bestimmt sey.

IV. Abschnitt.

Von der Cycloide.

§. 450.

Wenn sich ein Kreis in einer Ebene auf einer geraden Linie fortwälzt, so heißt die Linie, welche ein Punct der Peripherie beschreibt, eine Cycloide oder Radlinie, und der Kreis ihr Erzeugungskreis. Diese Linie ist also durch den Radius des Erzeugungskreises bestimmt, und die gerade Linie ist bey jeder Lage des Erzeugungskreises die Tangente eines Punctes seiner Peripherie.

§. 451.

Fig. 30. Es sey der beschreibende Punct durch die Umdrehung des Kreises in die gerade Linie VV', auf welcher sich der Kreis wälzt, nach A gekommen, und der Kreis drehe sich weiter, bis ein anderer Punct E seiner Peripherie mit VV' in F zusammen trifft, so ist AF = arc AE, weil voraus gesetzt ist, daß sich der Kreis auf der geraden Linie wälzend und nicht gleitend bewege.

§. 452.

Zieht man FG auf VV' senkrecht, so liegt der Mittelpunct des Kreises in FG, weil VV' die Tangente des Punctes F ist (§. 450.); es ist daher AF dem Wege des Mittelpunctes gleich, und man bekömmt die Stelle M des beschreibenden Punctes, und folglich einen Punct der Cycloide, wenn man über dem Durchmesser FG den Erzeugungskreis construirt, und in seiner Peripherie, arc MF = AF nimmt.

Der beschreibende Punct entfernt sich daher so weit von VV', bis der demselben entgegen gesetzte Punct der Peripherie in VV' fällt.

Wenn DQCD der Erzeugungskreis in dieser Lage, und CD sein auf VV' senkrechter Durchmesser ist, so ist AC = arc CQD, und D die Stelle des beschreibenden Punctes.

Bey weiterer Fortwälzung des Kreises nähert sich derselbe der Linie VV' wieder, und trifft in B damit zusammen, wenn AB der Peripherie des Erzeugungskreises gleich ist; dann entfernt er sich wieder von VV', und beschreibt neuerdings Bögen, welche dem Bogen AMDB congruent sind.

Der Theil AB der geraden Linie VV' heißt die Grundlinie oder Basis des Bogens ADB der Cycloide.

§. 453.

Aus dieser Erzeugungsart der Cycloide folgt, daß eine gerade Linie MP, aus irgend einem Puncte M der Cycloide auf DC senkrecht gezogen, wieder mit einem Puncte m der Cycloide zusammen treffe, wenn man ihre Verlängerung Pm durch P, = MP macht, und daß alle Puncte einer solchen Linie, deren Abstände von M oder m ein ganzes Vielfaches der Peripherie des Erzeugungskreises sind, in der Cycloide liegen.

DC ist also eine Achse des Bogens ADB, und da die Cycloide mit einer geraden Linie unbestimmt viele Puncte gemein haben kann, so ist sie eine transcendente Linie (§. 239.).

§. 454.

MP treffe mit GF in R, mit der Kreislinie DQCD aber in Q zusammen, und es seyen die Sehnen MF und QC gezogen.

Da sowohl MP und AC auf DC, als auch GF und DC auf AC senkrecht sind, so ist MP # AC, und GF # DC, mithin RP = FC und RF = PC; folglich ist $MF^2 = FG.FR = DC.PC = QC^2$, und daraus MF = QC. Daher ist

auch arc MF = arc QC, und AFM = ACQ, mithin MF # QC, und folglich MQ = FC.

Nun ist FC = AC — AF = arc DQC — arc MF (§. 452.) = arc DQC — arc QC, also MQ = arc DQ.

§. 455.

Die mechanische Beschreibung der Cycloide ergibt sich aus der Erklärung dieser Linie; um aber einzelne Puncte derselben zu bestimmen, kann man auf folgende Weise verfahren:

Man theile die halbe Peripherie DQC des Erzeugungskreises, und eine eben so große gerade Linie AC in gleich viele gleiche Theile, ziehe durch die Theilungspuncte in DQC gerade, auf dem Durchmesser DC senkrechte Linien, und schneide von ihren Verlängerungen auf der Seite der Theilungspuncte, Stücke ab, welche den entsprechenden Theilen auf AC gleich sind; man nehme nämlich, wenn Q der nte Theilungspunct auf DQC von D angefangen, und F der nte Theilungspunct auf AC von C angefangen ist, in der auf DC senkrechten Richtung, MQ = FC; denn nach dieser Construction ist wegen AC = arc DQC auch FC = arc DQ, mithin MQ = arc DQ; daher liegt M in der Cycloide (§. 454.).

Verlängert man MP durch P und M, und macht Pm = PM, so ist nicht nur m, sondern jeder auf dieser Linie von M oder m um 2AC, oder um ein Vielfaches von 2AC entfernte Punct ein Punct der Cycloide (§. 453.).

§. 456.

Wenn man die Achse DC als Abscissen-Linie, ihren Scheitel D als Anfangspunct, und die Coordinaten rechtwinklig annimmt, so ist für den Punct M, DP = x und MP = y; man hat also

y = QP + arc DQ (§. 454.)

Um daraus die Gleichung der Cycloide für das angenommene Coordinaten-System zu finden, müssen die veränderlichen Größen QP und arc DQ durch x ausgedrückt werden (§. 225.).

Bezeichnet man den Radius D K des Erzeugungskreises mit r, so ist $QP = \sqrt{2rx - x^2}$ (§. 311.), und wenn die Länge des mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen den Schenkeln des Winkels Q K D beschriebenen Kreisbogens $= \varphi$ gesetzt wird, so ist

$\cos \varphi = \frac{PK}{QK} = \frac{r-x}{r}$, und

arc D Q $= r\varphi$, mithin

arc D Q $= r.$ arc $(\cos = \frac{r-x}{r})$; daher ist

$y = \sqrt{2rx - x^2} + r.$ arc $(\cos = \frac{r-x}{r})$ die gesuchte Gleichung.

§. 457.

Wenn $\frac{r-x}{r}$ die Größe eines Cosinus angibt, so gehört er nicht zu Einem Bogen φ, dessen Mittelpunctswinkel hohl ist, sondern zu allen Bögen, welche durch $n.2\pi \pm \varphi$, und $-n.2\pi \pm \varphi$ ausgedrückt werden, n mag $= 0$ seyn, oder irgend eine positive ganze Zahl bezeichnen.

Von diesen Bögen haben die durch $\pm n.2\pi + \varphi$ angegebenen positive, die unter $\pm n.2\pi - \varphi$ begriffenen aber negative Sinus, und es folgt aus $\cos \varphi = \frac{r-x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r}$; daher ist in der Gleichung $y = \sqrt{2rx - x^2} + r.\text{arc}(\cos = \frac{r-x}{r})$, für solche Werthe von arc $(\cos = \frac{r-x}{r})$, deren Sinus positiv sind, auch $\sqrt{2rx - x^2}$ positiv, für Werthe von arc $(\cos = \frac{r-x}{r})$ aber, deren Sinus negativ sind, ebenfalls negativ zu nehmen.

Die gefundene Gleichung gehört also nicht etwa für den Bogen A M D allein, sondern sie gibt das Coordinaten-Verhältniß für alle Puncte der Cycloide an.

§. 458.

Da man den Bogen, der in der gefundenen Gleichung vermittelst seines Cosinus gegeben ist, durch jede andere trigonometrische Linie ausdrücken kann, so läßt sich die gefundene Gleichung der Cycloide ohne Veränderung des Coordinaten-Systemes in verschiedenen Formen darstellen.

Es ist nämlich aus $\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) = \varphi$,

$\frac{r-x}{r} = \cos\varphi = 1 - \text{sin vers}\,\varphi$, mithin $\text{sin vers}\,\varphi = \frac{x}{r}$, also

φ oder $\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) = \text{arc}\left(\text{sin vers} = \frac{x}{r}\right)$, wodurch die die Gleichung die Form:

$y = \sqrt{2rx-x^2} + r.\text{arc}\left(\text{sin vers} = \frac{x}{r}\right)$ erhält.

Eben so findet man

$y = \sqrt{2rx-x^2} + r.\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}\right)$.

§. 459.

Da $d\sqrt{2rx-x^2} = (r-x)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx(2r-x)^{-\frac{1}{2}}$, und nach §. 286., d. $\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) = x^{-\frac{1}{2}}\,dx(2r-x)^{-\frac{1}{2}}$ gefunden wird, so folgt daraus

$dy = x^{-\frac{1}{2}}\,dx(2r-x)^{\frac{1}{2}}$, also $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2r} \times x^{-\frac{1}{2}}dx$.

Man erhält demnach (§. 254.),

$$\text{Subt.} = \frac{y\,dx}{dy} = x\left(1 + \frac{r\ \text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right)}{\sqrt{2rx-x^2}}\right);$$

folglich, wenn MT die Tangente des Punctes M ist,

$$DT = PT - DP = \text{Subt.} - x = \frac{x \times r\ \text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right)}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$= \frac{DP.MQ}{QP}.$$

Daraus folgt die Proportion $QP : DP = MQ : DT$; also ist MT zur Sehne QD parallel, und da DQC ein rechter Winkel ist, so ist die Normale MN zur Sehne QC parallel.

Zur Construction der Tangente und der Normale eines in der Cycloide gegebenen Punctes M darf man daher nur MP senkrecht auf die Achse, durch den Durchschnitt Q dieser Linie mit der Peripherie des Erzeugungskreises DQC die Sehnen QD und QC, und durch M die Linien MT und MN damit parallel ziehen.

* §. 460.

Aus der allgemeinen Formel

$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$ (§. 265.) für den Krümmungshalbmesser erhält man für die Cycloide,

$\varrho = \sqrt{8r^3}.\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx^3 : -dx.d[x^{-\frac{1}{2}}\, dx(2r-x)^{\frac{1}{2}}]$ (§. 459.)

$= \sqrt{8r^3}.\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx^3 : r\,x^{-1}\, dx^3\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{2r(2r-x)}.$

Da nun $QC = \sqrt{CD.CP} = \sqrt{2r(2r-x)}$ ist, so ist $\varrho = 2QC$.

Der Krümmungshalbmesser ist daher für den Scheitel D, $= 2CD$, wird für Puncte, die weiter von D abstehen, kleiner, und ist für A Null.

Die Cycloide ist also vom Scheitel gegen die Basis zu immer stärker gekrümmt, und zwar bey A so, daß, wenn man mit einem beliebig kleinen Radius einen Kreis beschriebe, die Krümmung eines andern Kreises mit einem noch kleinern Radius, von der Krümmung der Cycloide bey A weniger abweichen würde, als die des erstern Kreises.

§. 461.

Für einen Bogen s der Cycloide hat man

$s = \int(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§. 250.) $= \sqrt{2r}\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + C$ (§. 459.)

$= \sqrt{2r}.\, 2\,x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{2rx} + C.$

Wenn man den Anfangspunct des Bogens s in den Scheitel setzt, so ist für $x = o$ auch $s = o$, folglich $C = o$ und $s = 2\sqrt{2rx}$.

Die Länge des Bogens vom Scheitel bis an die Basis ist also $= 4r$, und folglich die Länge desselben vom einen Endpuncte der Basis bis zum andern $= 8r = 4CD$.

§. 462.

Um die Fläche MPD zwischen den Coordinaten DP, MP und dem Bogen DM zu quadriren, hat man nach der Formel $V = \int y\,dx + C$ (§. 277.) für die Cycloide,

$$V = \int [(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + r\,dx\,\text{arc}\,(\cos = \tfrac{r-x}{r})] + C.$$

Man differentiire, um $\int r\,dx\,\text{arc}\,(\cos = \frac{r-x}{r})$ zu erhalten, $\text{arc}\,(\cos = u) \int U\,du$ (§. 296.).

Es ist $d[\text{arc}\,(\cos = u) \int U\,du] =$

$$U\,du\,\text{arc}\,(\cos = u) + \int U\,du \times d\,\text{arc}\,(\cos = u)$$

$$= U\,du\,\text{arc}\,(\cos = u) - \frac{du \int U\,du}{\sqrt{1 - u^2}}$$ (§. 286.), also

$$\int U\,du\,\text{arc}\,(\cos = u) = \text{arc}\,(\cos = u) \int U\,du + \int \left(\frac{du \int U\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Die Subsumirung der Formel $r\,dx\,\text{arc}\,(\cos = \frac{r-x}{r})$ unter $U\,du\,\text{arc}\,(\cos = u)$ gibt nun $u = \frac{r-x}{r}$, und $U\,du = r\,dx$; also ist $du = -\frac{dx}{r}$, $\int U\,du = rx$, $\sqrt{1-u^2} = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r}$; mithin

$$\int r\,dx\,\text{arc}\,(\cos = \tfrac{r-x}{r}) = rx\,\text{arc}\,(\cos = \tfrac{r-x}{r}) +$$

$$\int -\frac{rx\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = rx\,\text{arc}\,(\cos = \tfrac{r-x}{r}) - r \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2r - x)^{-\frac{1}{2}};$$

daher wird

$$V = r\,x\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) - r\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2r-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2r-x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Aus II, 3. (§. 295.) ist nun

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2r-x)^{-\frac{1}{2}} = 2\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right);$$ mithin bekömmt man durch die Reductions-Formel C,

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2r-x)^{-\frac{1}{2}} = -x^{\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}} + 2r.\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right),$$

und dann durch die Reductions-Formel A,

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2r-x)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}r\,x^{\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}} + r^2\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right),$$

also

$$V = r\,x\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) + r\,x^{\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$-2r^2\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right) + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}r\,x^{\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}} + r^2\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right) + C$$

$$= r\,x\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) - r^2\,\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(r+x)\sqrt{2rx-x^2} + C.$$

Da der Voraussetzung zu Folge $V = o$ seyn muß, wenn $x = o$ ist, so erhält man $o = -r^2\,\text{arc}\,(\sin = o) + C$, mithin $C = o$.

Bezeichnet man $\text{arc}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right)$ mit φ, und $\text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{2r}}\right)$ mit ψ, so ist $\frac{r-x}{r} = \cos\varphi$, und $\sqrt{\frac{x}{2r}} = \sin\psi$, also $x = r(1-\cos\varphi) = 2r\sin^2\psi$.

Daraus folgt $\sin^2 \psi = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) = \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$; mithin ist $\psi = \frac{1}{2}\varphi$, und

$$V = r x \varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \varphi + \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{2 r x - x^2}$$

$$= r(x - \tfrac{1}{2} r)\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r - x}{r}\right) + \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{2 r x - x^2}.$$

Für $x = 2 r$ wird

$V = \frac{3}{2} r^2 \,\text{arc}\,(\cos = -1) = \frac{3}{2} r^2 \pi$; also ist D M A C $= 3$ D Q C D, und mithin die ganze, von der Basis A B und dem Bogen A M D B eingeschlossene Fläche dem dreyfachen Erzeugungskreise gleich.

* §. 463.

Fig. 31. Es sey D C die Achse, B C die halbe Grundlinie, und M m der Krümmungshalbmesser eines Punctes M im Bogen D M B der Cycloide, so ist m ein Punct ihrer Evolute (§. 271.).

Nun hat man allgemein, wenn die rechtwinkligen Coordinaten D P und M P des Punctes M mit x und y, und die rechtwinkligen Coordinaten D p und m p des Punctes m mit f und g bezeichnet werden,

$$f = x - \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ und } g = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2 y}$$ (§. 271.),

und es ist für die Cycloide

$$y = (2 r x - x^2)^{\frac{1}{2}} + r.\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r - x}{r}\right)$$ (§. 456.),

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d^2 y} = -2(2 r x - x^2)^{\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{(2 r x - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$ (§. 459.);

folglich wird für diese Linie,

$$f = 4 r - x, \text{ und } g = r\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r - x}{r}\right) - \sqrt{2 r x - x^2}.$$

Der Werth von x aus der ersten Gleichung in der zweyten substituirt, gibt daher die Gleichung der Evolute (§. 271.):

$$g = r.\,\text{arc}\left(\cos = \frac{f - 3 r}{r}\right) - \sqrt{-8 r^2 + 6 f r - f^2}.$$

Setzt man $-8 r^2 + 6 f r - f^2 = 0$, so folgt daraus $f = 3 r \pm r$.

Für den ersten Werth von f wird in Beziehung auf den Bogen D B,

$g = r \arccos(\cos = 1) = 0$, und für den zweyten,

$g = r \arccos(\cos = -1) = r\pi$.

Die Evolute des Bogens D B trifft also mit ihm in B, und mit der Achse D C in d zusammen, wenn man $D d = 4r = 2 D C$ macht.

Für $f > 4r$ und für $f < 2r$ wird g unmöglich; daher ist die Evolute ganz zwischen C B und der dazu Parallelen d E enthalten.

* §. 464.

Wenn B d′ die Evolute des nächsten Bogens B D′ der Cycloide ist, so folgt aus der Congruenz der Bögen B D′ und B D, und aus ihrer Lage gegen C B, daß auch B d′ und B d congruent seyn, und an entgegen gesetzten Seiten von B E einerley Lage gegen diese gerade Linie haben müssen, wenn B E auf B C senkrecht ist.

Es ist also B E eine Achse der Evolute, und B ihr Scheitel.

Um die Gleichung der Evolute in Beziehung auf diese Achse zu erhalten, verlängere man p m bis an B E in Q, setze $B Q = x'$, und $m Q = y'$, so ist

$f = 2r + x'$ und $g = p Q - y' = B C - y' = r\pi - y'$;

also wird aus der (§. 463.) gefundenen Gleichung,

$$r\pi - y' = r \cdot \arccos\left(\cos = \frac{x' - r}{r}\right) - \sqrt{2rx' - x'^2},$$

folglich

$$y' = \sqrt{2rx' - x'^2} + r\left[\pi - \arccos\left(\cos = \frac{x' - r}{r}\right)\right].$$

Bezeichnet man $\arccos\left(\cos = \frac{x' - r}{r}\right)$ mit ψ, so ist $\frac{x' - r}{r} = \cos\psi$, und

$$y' = \sqrt{2rx' - x'^2} + r(\pi - \psi).$$

Da aber $\cos(\pi - \psi) = -\cos\psi = \frac{r - x'}{r}$ ist, so ist $\pi - \psi = \text{arc}\left(\cos = \frac{r - x'}{r}\right)$, und mithin

$$y' = \sqrt{2rx' - x'^2} + r \cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{r - x'}{r}\right).$$

Die Evolute der Cycloide ist also ebenfalls eine Cycloide, und zwar eine ihr congruente.

III. Hauptstück.

Von den Flächen und Linien im Raume.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung der Lage der Puncte im Raume.

---

§. 465.

Fig. 32. Es seyen XAY, XAZ, YAZ drey unbegrenzte Ebenen, welche sich in den Linien AX, AY, AZ schneiden. In der körperlichen, von diesen Ebenen gebildeten Ecke AXYZ liege ein Punct M, und durch diesen seyen drey andere Ebenen MR, MQ, MP zu den vorigen der Ordnung nach parallel.

Diese sechs Ebenen geben ein Parallelepipedum QM'', welches durch die Ecke AXYZ nebst den Seiten AP, AQ und AR bestimmt ist.

Die Stelle eines Punctes in einer Ecke von drey Seitenflächen wird also durch die Stücke der Durchschnittslinien dieser

Seitenflächen bestimmt, welche drey durch den Punct gelegte, zu den letztern parallele Ebenen vom Scheitel der Ecke aus abschneiden.

§. 466.

Bey dieser Art, die Lage von Puncten zu bestimmen, heißen AP, AQ, AR die Coordinaten des Punctes M, die unbegrenzten Linien AX, AY, AZ, auf welchen die Coordinaten genommen sind, nennt man die Coordinaten-Linien, und die Seitenflächen der Ecke heißen die coordinirten Ebenen.

Bezeichnet man die Coordinaten, in der Richtung AX mit x, in der Richtung AY mit y, und in der Richtung AZ mit z, so heißt XAY die Ebene der x und y, XAZ die Ebene der x und z, YAZ die Ebene der y und z.

Der Einfachheit wegen werden die coordinirten Ebenen gewöhnlich auf einander senkrecht angenommen. Bey dieser Voraussetzung, die in der Folge immer beybehalten wird, sind dann die Seiten des Parallelepipedums QM'' auf einander senkrecht; mithin sind die Coordinaten AP, AQ, AR eines Punctes M, die auf die Coordinaten-Linien übertragenen Entfernungen dieses Punctes von den coordinirten Ebenen.

Die Durchschnittspuncte M', M'', M''' der Linien MM' MM'', MM''' mit den coordinirten Ebenen heißen die Projectionen des Punctes M auf den coordinirten Ebenen, die Abstände MM', MM'', MM''' selbst aber heißen die projicirenden Linien, zuweilen auch selbst die Coordinaten des Punctes M, weil diese Linien der Ordnung nach mit AR, AQ, AP einerley Größe, und auch einerley Lage hinsichtlich derjenigen von den coordinirten Ebenen haben, auf welchen sie senkrecht sind.

§. 467.

Die beyden Coordinaten eines Punctes, welche in einer von den coordinirten Ebenen liegen, sind auch die Coordinaten

seiner Projection in dieser Ebene; so sind z. B. die Coordinaten AP und AQ des Punctes M in der Ebene XAY, auch die Coordinaten seiner Projection M'.

Durch eine Projection eines Punctes sind also zwey Coordinaten desselben gegeben; folglich ist sein Ort bestimmt, wenn man zwey Projectionen desselben kennt.

§. 468.

Fig. 33. Die unbegrenzten coordinirten Ebenen geben um A acht körperliche Ecken: AXYZ, AXYZ', AXZY', AYZX', AXY'Z', AZX'Y', AYX'Z' und AX'Y'Z'.

Für einen Punct in der Ecke AXYZ' muß seine Projection auf der Ebene der x und y in den Winkel XAY, und seine Projection auf der Ebene der x und z in den Winkel XAZ' fallen.

Wenn man nun die Coordinaten nach den Richtungen AX, AY und AZ positiv annimmt, so ist für die erste von diesen beyden Projectionen, x und y positiv, für die zweyte aber x positiv und z negativ (§. 224.); für den Punct in der Ecke AXYZ' ist also, da derselbe mit seinen Projectionen einerley Coordinaten hat (§. 467.), x und y positiv, z aber negativ.

Auf diese Art werden durch die Ecke, in welcher ein Punct liegt, die Zeichen seiner Coordinaten, und umgekehrt wird jene durch diese bestimmt.

Das angenommene Coordinaten-System dient also zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Puncten im Raume, sie mögen in der Ecke AXYZ liegen, oder nicht.

§. 469.

Fig. 32. Die Linie bd, in welcher die Projectionen aller Puncte einer Linie BD liegen, diese mag von einfacher oder von doppelter Krümmung seyn (§. 220.), heißt eine Projection der letztern; und die Fläche, in welcher die projicirenden Linien aus den Puncten der Linie BD liegen, nennt man die projicirende Fläche.

Die Projection einer Linie auf einer von den coordinirten Ebenen ist also der Durchschnitt der letztern mit der projicirenden Fläche.

Für jede Linie gibt es drey Projectionen und drey projicirende Flächen, nämlich auf jede der coordinirten Ebenen Eine.

§. 470.

Wenn B D eine gerade Linie ist, und man legt durch B D und durch Eine von den projicirenden Linien eine Ebene, so liegen alle übrigen in derselben; daher ist die projicirende Fläche eine Ebene, und mithin jede Projection einer geraden Linie ebenfalls eine gerade Linie.

Ist eine Projection b d einer krummen Linie B D ebenfalls krumm, so rechnet man die projicirende Fläche zu den cylindrischen, und heißt die geraden Linien in ihr Seiten, wenn gleich die Projection keine Kreislinie ist.

§. 471.

Jede Linie B D liegt in ihren drey projicirenden Flächen zugleich, sie ist also der gemeinschaftliche Durchschnitt derselben; daher wird eine Linie durch zwey von ihren Projectionen bestimmt, weil jede projicirende Fläche durch die Projection der Lage nach bestimmt ist.

II. Abschnitt.

Von den Gleichungen der Flächen, und der Linien im Raume.

§. 472.

Eine Gleichung, welche zwischen den Coordinaten eines jeden Punctes einer Fläche Statt hat, heißt eine Gleichung der Fläche.

Auf ähnliche Weise, wie §. 227. läßt sich zeigen, daß jede Gleichung mit drey veränderlichen Größen, wenn durch die letztern die Größen von Coordinaten angegeben werden, immer die Gleichung einer Fläche sey, vorausgesetzt, daß bey stetig auf einander folgenden Werthen von zweyen derselben auch die dritte, mögliche Werthe haben könne.

Man heißt die Flächen eben so, wie die Linien (§. 235.), nach ihren Gleichungen algebraische oder transcendente, und die erstern werden wieder in verschiedene Ordnungen eingetheilt.

§. 473.

Fig. 32. Wenn die Seiten einer cylindrischen Fläche (§. 470.) BbdD auf der Ebene der x und y senkrecht sind, so hat für alle Puncte in einer Seite MM' derselben sowohl x als y einerley Größe. In der Gleichung einer solchen Fläche kann also z, (der Abstand eines Punctes dieser Fläche von der Ebene der x und y) gar nicht vorkommen; denn enthielte sie z, so würde y durch z und x bestimmt, also gäbe die Gleichung auch bey einerley Werth von x, verschiedene Werthe von y, wenn man z verschieden annimmt.

Aus eben demselben Grunde muß y in der Gleichung einer cylindrischen Fläche fehlen, wenn ihre Seiten auf der Ebene der x und z senkrecht sind, und sie kann x nicht enthalten, wenn ihre Seiten auf der Ebene der y und z senkrecht stehen.

Diese Sätze gelten auch für Ebenen, welche auf einer von den coordinirten Ebenen senkrecht sind.

§. 474.

Da alle Puncte einer Ebene, die zu einer von den coordinirten Ebenen parallel ist, von dieser gleich weit entfernt sind, so ist $z = a$ die Gleichung einer zur Ebene der x und y im Abstande a parallelen Ebene; $y = b$ ist die Gleichung einer Ebene, welche zur Ebene der x und z im Abstande b parallel ist, und

$x = c$ die Gleichung einer Ebene, die im Abstande c zur Ebene der y und z parallel ist.

In jeder von diesen Gleichungen fehlen zwey Coordinaten, weil jede von den Ebenen, wozu die Gleichungen gehören, auf zwey coordinirten Ebenen zugleich senkrecht ist (§. 473.).

Setzt man a, b und c Null, so fallen diese Ebenen mit den coordinirten Ebenen zusammen; folglich sind $z = o$, $y = o$ und $x = o$ die Gleichungen der letztern.

§. 475.

Wenn eine Fläche durch eine, allen Puncten in ihr ausschließlich zukommende Eigenschaft gegeben ist, so muß man, um eine Gleichung dieser Fläche zu erhalten, die Lage der coordinirten Ebenen gegen die Fläche, im Falle sie nicht schon vorgeschrieben ist, so annehmen, daß die Uebersicht, wie die Coordinaten von einander abhangen, möglichst leicht werde. Uebrigens wird zur Ableitung der Gleichung für jede Fläche ein besonderes Verfahren erfordert.

Wenn z. B. eine Gleichung der Kugelfläche gefunden werden soll, so ist es am einfachsten, die coordinirten Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel zu legen.

Wenn man also annimmt, es sey (Fig. 32.) A der Mittelpunct der Kugel, und M ein Punct in der Kugelfläche, so ist AM eine beständige Linie. Diese Eigenschaft bestimmt die Kugelfläche, und unterscheidet sie von allen übrigen Flächen.

Wenn für den Punct M, $AP = x$, $M'P = y$ und $M''M = z$ ist, und wenn man AM' zieht, so ist $AM'^2 = x^2 + y^2$ und $AM^2 = AM'^2 + M'M^2 = x^2 + y^2 + z^2$, oder $AM = a$ gesetzt, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ die Gleichung der Kugelfläche für das angenommene Coordinaten-System.

§. 476.

Fig. 34. Eine Ebene schneide die coordinirten Ebenen in den Linien BC, BD und CD, und es sey zur Bestimmung ih-

rer Lage gegen die coordinirten Ebenen, $AB = a$ nebst den Winkeln $ABC = \alpha$, und $ABD = \beta$ gegeben.

Man lege durch einen willkürlichen Punct M dieser Ebene eine andere zur Ebene YAZ parallel. Diese Ebene schneide die beyden andern coordinirten Ebenen in EP und FP, die Ebene BCD in EF, und durch M sey MM' auf EP senkrecht.

Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß für den Punct M, $AP = x$, $M'P = y$, $MM' = z$, FP und EP senkrecht auf AB, und $MM' \# FP$ sey.

Es ist daher $EP = BP \text{ tang. } ABC = (a - x) \text{ tang. } \alpha$, $FP = BP \text{ tang. } ABD = (a - x) \text{ tang. } \beta$, und es verhält sich $EP : FP = EM' : MM'$, nämlich $\text{tang. } \alpha : \text{tang. } \beta = (a - x) \text{ tang. } \alpha - y : z$, woraus die Gleichung dieser Ebene,

$$z = a \text{ tang. } \beta - x \text{ tang. } \beta - \frac{\text{tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha} \cdot y \text{ folgt.}$$

§. 477.

Setzt man $AC = b$ und $AD = c$, so ist

$\text{tang. } \alpha = \frac{b}{a}$, und $\text{tang. } \beta = \frac{c}{a}$, und es wird aus der vorhergehenden Gleichung,

$$z = c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b}, \text{ oder } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Da in dieser Gleichung die Lage der Ebene durch $AB = a$, $AC = b$ und $AD = c$, mithin durch die Puncte B, C, D, in welchen die Coordinaten-Linien von der Ebene geschnitten werden, bestimmt ist, so kann die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunct A geht, unter dieser Form nicht dargestellt werden, weil für diesen Fall die Puncte B, C und D in dem Puncte A zusammen fallen.

§. 478.

Aus der allgemeinen Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y und z, welche in Hinsicht auf jede derselben vom ersten Grade ist, nämlich aus

$Ax+By+Cz+D=o$ folgt

$$z=-\frac{D}{C}-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y.$$

Soll diese Gleichung mit der Gleichung

$$z=a\,\text{tang.}\,\beta-x\,\text{tang.}\,\beta-\frac{\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\,\alpha}y$$ (§. 476.) einerley seyn,

so muß $-\frac{D}{C}=a\,\text{tang.}\,\beta$,

$\frac{A}{C}=\text{tang.}\,\beta$ und $\frac{B}{C}=\frac{\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\,\alpha}$ seyn.

Da man durch diese Voraussetzungen drey Gleichungen erhält, wodurch also die Größen α, β und a vermittelst der Coefficienten A, B, C und D bestimmt sind, so ist $Ax+By+Cz+D=o$ die Gleichung einer Ebene, wenn x, y und z zusammen gehörige Coordinaten bezeichnen.

Diese Ebene schneidet die Coordinaten-Linie AX in einem Puncte, dessen Abstand a vom Anfangspuncte $=-\frac{D}{A}$ ist; ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der x und y macht mit AX einen Winkel α, dessen Tangente $=\frac{A}{B}$ ist, und für ihren Winkel β mit AX in der Ebene der x' und z ist $\text{tang.}\,\beta=\frac{A}{C}$.

§. 479.

Da die Gleichung einer Fläche angibt, welches Verhältniß zwischen den Coordinaten eines jeden Punctes in ihr Statt haben müsse (§. 472.), so liegt ein Punct, dessen Coordinaten den Bedingungen entsprechen, welche die Gleichungen zweyer Flächen zusammen enthalten, in beyden Flächen zugleich.

Die Gleichungen zweyer Flächen haben also zugleich nur für ihren Durchschnitt Statt; wenn man nämlich setzt, daß x in den Gleichungen zweyer Flächen eben dieselbe Größe bezeichne, und daß dieses auch bey y und z der Fall sey, so bestimmen beyde Gleichungen zusammen ihren Durchschnitt.

Da $z = o$ die Gleichung der Ebene der x und y, und $y = o$ die Gleichung der Ebene der x und z ist (§. 474.), so sind $z = o$ und $y = o$ die beyden Gleichungen für ihren Durchschnitt AX (Fig. 32.), d. h. für jeden Punct der Linie AX ist bey was immer für einem Werthe von x, $y = o$ und zugleich auch $z = o$.

Eben so sind $x = o$, $z = o$ die Gleichungen der Linie AY, und $x = o$, $y = o$ die Gleichungen für AZ.

§. 480.

Wenn man mit der Gleichung einer cylindrischen Fläche, deren Seiten auf der Ebene der x und y senkrecht sind, die Gleichung dieser Ebene: $z = o$ verbindet, so erhält man die Gleichungen für ihren Durchschnitt mit der Ebene der x und y; da aber z in der Gleichung der cylindrischen Fläche nicht enthalten ist (§. 473.), so wird diese Gleichung durch ihre Verbindung mit der Gleichung $z = o$ nicht verändert; man bekömmt also den Durchschnitt, wenn man in der Ebene der x und y die Linie construirt, deren Gleichung die Gleichung der cylindrischen Fläche ist.

Eben so verhält es sich bey den cylindrischen Flächen, deren Seiten auf einer von den beyden übrigen coordinirten Ebenen senkrecht sind.

§. 481.

Fig. 34. Aus der Gleichung $z = a \text{ tang. } \beta - x \text{ tang. } \beta - \frac{\text{tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha} y$ (§. 476.) ist für den Durchschnitt BC der Ebene BCD mit der Ebene der x und y, $x \text{ tang. } \alpha + y = a \text{ tang. } \alpha$; für ihren Durchschnitt BD mit der Ebene der x und z, $z + x \text{ tang. } \beta = a \text{ tang. } \beta$, und für ihren Durchschnitt CD mit der Ebene der y und z, $z \text{ tang. } \alpha + y \text{ tang. } \beta = a \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta$ (§. 479.).

§. 482.

Durch die Verbindung der Gleichungen A und B zweyer

Flächen läßt sich überhaupt jede von den drey Veränderlichen: x, y und z fortschaffen; d. h. es läßt sich eine Gleichung C zwischen x und y, eine D zwischen x und z, und eine E zwischen y und z ableiten; aber die dritte folgt immer schon aus den beyden übrigen. Denn da man zwischen x, y und z zwey Gleichungen A und B hat, so sind dadurch nur zwey von diesen Größen bestimmt (§. 32.); eine davon, z. B. x, kann daher nach Belieben angenommen werden.

Durch x ist nun vermittelst der Gleichung C die Größe y, durch D die Größe z bestimmt, und diese Werthe von y und z müssen auch zusammen gehörige Werthe in der Gleichung E seyn, weil E eben so, wie C und D, aus A und B abgeleitet ist.

Die Gleichung C für sich allein ist die Gleichung der, den Durchschnitt der beyden Flächen auf die Ebene der x und y projicirenden Fläche, und auch die Gleichung für die Projection des Durchschnittes auf dieser Ebene (§. 480.); eben dasselbe sind die Gleichungen D und E hinsichtlich der übrigen coordinirten Ebenen.

Durch zwey von den Gleichungen C, D und E ist daher der Durchschnitt zweyer Flächen (§. 471.), und durch zwey Projectionen desselben die dritte bestimmt.

§. 483.

Um eine Vorstellung von der Gestalt einer Fläche zu erhalten, für welche eine Gleichung gegeben ist, sucht man nach §. 479. Gleichungen für die Durchschnitte der Fläche mit Ebenen, die eine bestimmte Lage gegen die coordinirten Ebenen haben.

Gewöhnlich nimmt man die schneidenden Ebenen zu den coordinirten parallel an, weil man dann, um die Gleichungen für die Durchschnitte zu erhalten, nur eine von den Coordinaten als eine beständige Größe nehmen darf (§. 474.).

Fig. 35. Es sey z. B. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ die Gleichung einer Fläche.

Für ihren Durchschnitt mit einer Ebene, welche zur Ebene der x und y im Abstande h parallel ist, folgt daraus

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{h}{c}\right)^2=1$, oder $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^2}{c^2}(c^2-h^2)-x^2\right]$.

Für $h=o$, also für den Durchschnitt mit der Ebene der x und y selbst erhält man

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{(2b)^2}{(2a)^2}\left[\frac{1}{4}(2a)^2-x^2\right]$; dieser ist also eine Ellipse B C B′ C′, deren Achsen 2 a und 2 b sind, ihr Mittelpunct ist der Anfangspunct A der Coordinaten, ihre Achse, welche $=2a$ ist, liegt in X′ X, der Coordinaten-Linie der x, und die andere in Y′ Y, der Coordinaten-Linie der y (§. 346.).

Es ist aber auch die Gleichung

$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^2}{c^2}(c^2-h^2)-x^2\right]$ unter $y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{4}\alpha^2-x^2\right)$ begriffen, und es folgt daraus, wenn man

$\frac{a^2}{c^2}(c^2-h^2)=\frac{1}{4}\alpha^2$, und $\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{b^2}{a^2}$ setzt,

$\alpha=\frac{2a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ und $\beta=\frac{2b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$. Daher ist auch jeder zur Ebene der x und y parallele Durchschnitt eine Ellipse, deren Achsen α und β sich wie a : b verhalten, aber kleiner werden, wenn h zunimmt. Der Mittelpunct einer jeden solchen Ellipse liegt in Z Z′, die Achse α in der Ebene der x und z, und die Achse β in der Ebene der y und z.

Eben dasselbe findet man für die Durchschnitte mit Ebenen, welche zu einer von den übrigen coordinirten Ebenen parallel sind; mit dem Unterschiede, daß der Durchschnitt B D B′ D′ mit der Ebene der x und z eine Ellipse ist, deren Achsen $BB'=2a$ und $DD'=2c$ sind, und daß der Durchschnitt C D C′ D′ mit der Ebene der y und z die Linien $CC'=2b$ und $DD'=2c$ zu seinen Achsen hat.

Die Fläche, wozu die Gleichung

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ gehört, begrenzt also einen Raum, und dieser begrenzte Raum hat die Gestalt eines platt gedrückten elliptischen Sphäroides; er ist ein solches Sphäroid selbst,

wenn zwey von den Größen: a, b und c einander gleich sind, und eine Kugel, wenn a = b = c ist.

§. 484.

Jede Linie im Raume kann als Durchschnitt zweyer Flächen betrachtet werden. Weil eine Linie durch zwey von ihren Projectionen bestimmt ist (§. 471.), so gibt man die Lage ihrer Puncte durch die Gleichungen zweyer Projectionen an; man betrachtet sie daher als den Durchschnitt zweyer projicirenden Flächen.

§. 485.

Fig. 36. Wenn sich bey einer Linie B M D H I G L in der Seitenfläche eines senkrechten Cylinders die Stücke M M', E D der Seiten des Cylinders, welche zwischen ihr und der Peripherie B M' E F B der Grundfläche liegen, wie die von diesen Seiten abgeschnittenen Bögen B M', B E der Grundfläche, von einem bestimmten Puncte B der Grundfläche angefangen, verhalten; so heißt die Linie eine Schraubenlinie. Sie ist also eine Linie von doppelter Krümmung (§. 220.).

Der Punct B ist ein Punct der Schraubenlinie; denn wegen M M' : D E = B M' : B E wird M M' = o, wenn man B M' = o setzt.

Setzt man den Bogen B M' der ganzen Peripherie gleich, und trifft alsdann die Schraubenlinie mit der durch B gehenden Seite des Cylinders in G zusammen, so heißt der Theil B M D H I G der Schraubenlinie ein Schraubengang, und B G seine Höhe.

Man nehme die Ebene der Grundfläche als Ebene der x und y, die Ebene durch B und die Achse als Ebene der y und z, so ist die Ebene X A Z, durch die Achse auf die letztere senkrecht gelegt, die Ebene der x und z.

Zieht man nun M' P auf A X senkrecht, so ist für den Punct M der Schraubenlinie, da M M' auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht steht, M M' = z, M' P = y und A P = x.

Es sey der Radius der Grundfläche des Cylinders = r, und die Höhe des Schraubenganges = a, so ist $y^2 = r^2 - x^2$ die

Gleichung der Projection der Schraubenlinie in der Ebene der x und y; ferner ist $BM' = r \text{ arc. } (\sin. = \frac{x}{r})$, und

$BEFB : BM' = BG : MM'$,

oder $2r\pi : r. \text{arc.} (\sin. = \frac{x}{r}) = a : z$; also ist

$z = \frac{a}{2\pi} \text{arc.} (\sin. = \frac{x}{r})$ die Gleichung zwischen x und z, und mithin die Gleichung der Projection $AM''DhIgL$ der Schraubenlinie in der Ebene der x und z.

Wird ein rechtwinkliges Dreyeck QRS, dessen Katheten $QR = 2r\pi$ und $RS = a$ sind, so um die Seitenfläche des Cylinders gewickelt, daß Q auf B und QR in BEFB fällt, so deckt die Hypotenuse QS den Schraubengang BDIG; denn nimmt man $Qm' = BM'$, und zieht $m'm$ auf QR senkrecht, so ist

$$mm' = \frac{RS.Qm'}{QR} = \frac{a.BM'}{2r\pi} = \frac{a}{2\pi} \text{arc.} (\sin. = \frac{x}{r}) = MM',$$

daher fällt bey der Umwicklung, m in den Punct M der Schraubenlinie.

III. Abschnitt.

Von den Berührungsebenen krummer Flächen, und von den Tangenten der Linien im Raume.

---

§. 486.

Fig. 37. Durch einen Punct M einer krummen Fläche seyen die drey Ebenen $MM'''RM''$, $MM'''QM'$ und $MM''PM'$ zu den coordinirten Ebenen wie in §. 465. parallel. Die krumme Fläche werde von der ersten in ME, von der zweyten in MG, und von der dritten in MH geschnitten.

In der Ebene MR sey MT die Tangente des Punctes M

der Linie ME, und in der Ebene MQ sey MT' die Tangente dieses Punctes für die Linie MG.

Von der Ebene dieser Tangenten werde die Ebene XAY in KT', und die Ebene XAZ in KT geschnitten; so ist KT' # TM, und KT # T'M, folglich auch KT' = TM.

Aus diesem folgt, daß, wenn T't zu M'P, und mithin auch zu MM'' parallel ist, △KtT' ∽ △TM''M, und mithin Kt = TM'' sey.

Aus der Gleichung für die krumme Fläche erhält man die Gleichung für ME, wenn man MM' oder z, die Gleichung für MG, wenn man M'P oder y, und die Gleichung für MH, wenn man AP oder x als beständig annimmt (§. 474. und 479.). Zur Gleichung der Linie ME gehört alsdann RM'' als Abscissen-Linie und R als Anfangspunct, für die Gleichung der Linie MG ist QM' die Abscissen-Linie und Q der Anfangspunct, und für die Gleichung der Linie MH ist PM' die Abscissen-Linie mit dem Anfangspuncte P.

Es ist daher TM'' die Subtangente des Punctes M der Linie ME, und T'M' die Subtangente des Punctes M der Linie MG; folglich ist $TM'' = \frac{y\,dx}{dy} = Kt$, wenn man z, und $T'M' = \frac{z\,dx}{dz} = tP$, wenn man y als beständig annimmt.

§. 487.

Die auf Null gebrachte Gleichung der Fläche gebe als Differentiale P dx, wenn man x allein, Q dy, wenn man y allein, und R dz, wenn man z allein als veränderlich betrachtet; dann ist $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ (§. 139.). Mithin hat man, z als beständig angenommen, $P\,dx + Q\,dy = 0$, und daraus $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$; wenn man aber y als beständig annimmt, $P\,dx + R\,dz = 0$, und $\frac{dx}{dz} = -\frac{R}{P}$. Folglich wird

$$Kt = TM'' = -\frac{Q}{P}y, \text{ und } tP = T'M' = -\frac{R}{P}z.$$

Wird die Lage der Ebene T K T' M gegen die coordinirten Ebenen eben so, wie in §. 476. durch A K = a, durch A K T' = α, und durch A K T = β angegeben, so hat man

$$a = AK = AP - Kt - tP = x + \frac{Q}{P} y + \frac{R}{P} z,$$

$$\text{tang. } \alpha = -\text{tang. } XKT' = -\text{tang. } M''TM = -\frac{dy}{dx} \text{ (§. 252.)}$$

$$= \frac{P}{Q}, \text{ und}$$

$$\text{tang. } \beta = -\text{tang. } TKX = \text{tang. } MT'M' = -\frac{dz}{dx} = \frac{P}{R}.$$

§. 488.

Wenn P M' mit K T' in T'' zusammen trifft, so ist

$$T''M' = T'M' \text{. tang. } M'T'T'' = T'M' \text{. tang. } XKT'$$

$$= -\frac{R}{P} z \times -\frac{P}{Q} = \frac{R}{Q} z.$$

Es folgt aber aus der Gleichung der Fläche, wenn man x als beständig annimmt, $Q\,dy + R\,dz = 0$, also $\frac{R}{Q} = -\frac{dy}{dz}$;

daher ist $T''M' = -\frac{z\,dy}{dz}$ = der Subtangente des Punctes M für den Durchschnitt A H, sowohl der Größe, als auch der Lage nach (§. 256.); mithin ist M T'' die Tangente.

Die Tangenten des Punctes M für die Durchschnitte M E, M G und M H der krummen Fläche mit Ebenen, die zu den coordinirten Ebenen parallel sind, liegen also selbst in Einer Ebene, welche man die Berührungsebene der krummen Fläche im Puncte M heißt.

Die Lage der Berührungsebene ist also durch zwey von diesen Tangenten bestimmt.

§. 489.

Die gerade Linie, welche durch einen Punct einer krummen Fläche auf der Berührungsebene dieses Punctes senkrecht ist, heißt die Normale desselben.

Zieht man aus M, ML auf KT' senkrecht, und durch L und M' die Linie LS, so ist auch LS auf KT' senkrecht; der Winkel MLS ist daher der Neigungswinkel der Berührungsebene mit der Ebene der x und y; und MN, in der Ebene dieses Neigungswinkels auf ML senkrecht gezogen, ist auf der Berührungsebene selbst senkrecht; folglich ist MN die Normale des Punctes M.

§. 490.

Wegen der rechten Winkel T'M'P und T'LM' ist T'M'L das Complement, sowohl des Winkels PM'S, als auch des Winkels M'T'L, folglich ist auch $PM'S = M'T'L = 180° - \alpha$.

Aus $\text{tang.}\,\alpha = \frac{P}{Q}$ (§. 487.) ist $\sin.\,\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$ und $\cos.\,\alpha = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$; daher ist auch $\sin.\,PM'S = \sin.M'T'L = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$, aber $\cos.PM'S = -\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$.

Aus dem rechtwinkligen Dreyecke T'LM' ist nun $M'L = T'M' \sin.M'T'L = -\frac{R}{P}z \times \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$ (§. 487.) $= -\frac{Rz}{\sqrt{P^2+Q^2}}$, und aus dem rechtwinkligen Dreyecke LMN ist $M'N = \frac{MM'^2}{LM'} = -\frac{z\sqrt{P^2+Q^2}}{R}$.

Ferner ist, wenn $NU \# AX$ gezogen wird, aus dem rechtwinkligen Dreyecke M'UN, $M'U = M'N \cos.PM'S = -\frac{z\sqrt{P^2+Q^2}}{R} \times -\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{Q}{R}z$, und $UN = M'N \sin.PM'S = -\frac{z\sqrt{P^2+Q^2}}{R} \times \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = -\frac{P}{R}z$.

Sind nun $Ap = x'$ und $Np = y'$ die Coordinaten des

Punctes N, in welchem die Ebene der x und y von der Normale geschnitten wird, so ist also

$$x' = A\,p = A\,P + P\,p = A\,P + U\,N = x - \frac{P}{R}z, \text{ und}$$

$$y' = N\,p = U\,P = M'\,P - M'\,U = y - \frac{Q}{R}z.$$

§. 491.

Aus dem rechtwinkligen Dreyecke $M\,M'\,N$ ist $M\,N^2 = M\,M'^2 + M'\,N^2 = z^2 + \frac{z^2(P^2+Q^2)}{R^2}$ (§. 490.) $= \frac{z^2\,(P^2+Q^2+R^2)}{R^2}$;

folglich ist die Länge der Normale vom Berührungspuncte bis zum Durchschnitte mit der Ebene der x und y, $M\,N = n = z\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}}$.

Endlich erhält man für den Neigungswinkel ϑ der Berührungsebene mit der Ebene der x und y aus dem rechtwinkligen Dreyecke $L\,M'\,M$,

$$\text{tang. } M\,L\,M' = \text{tang. } \vartheta = \frac{M\,M'}{L\,M'} = z : -\frac{Rz}{\sqrt{P^2+Q^2}} =$$

$$-\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{R}, \text{ mithin sec. } \vartheta = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{R^2}.$$

§. 492.

Fig. 38. Um die Anwendung der im gegenwärtigen Abschnitte gefundenen Formeln zu zeigen, sey eine Berührungsebene durch einen Punct eines Sphäroides zu legen, welches durch die Umdrehung einer Linie A B um eine gerade Linie A X entsteht.

Man nehme die Umdrehungsachse A X als Abscissen-Linie, einen Punct A in ihr als Anfangspunct, und suche eine Gleichung der Linie A B zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y".

Die coordinirten Ebenen werden auf die einfachste Art so gelegt, daß A X der Durchschnitt der Ebene der x und y mit der Ebene der x und z wird, und daß die Ebene der y und z durch A geht.

Durch den beliebigen Punct M der Oberfläche des Sphäroides sey MM′ auf XAY, und M′P auf AX senkrecht; so ist AX = x, M′P = y, MM′ = z, und, da in diesem Falle auch MP auf AX senkrecht steht, MP = y″.

Aus dem rechtwinkligen Dreyecke MM′P ist nun $M'P^2 + MM'^2 = MP^2$, nämlich $y^2 + z^2 = y''^2$, oder $y^2 + z^2 - y''^2 = 0$. Substituirt man in dieser Gleichung für y″ aus der Gleichung der Linie AB, so hat man die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroides.

Es mag indessen die Gleichung der Linie AB zwischen x und y″ beschaffen seyn, wie sie will, so verändert sich y″ nicht, wenn x unverändert bleibt.

Man erhält daher aus der Gleichung $y^2 + z^2 - y''^2 = 0$, wenn y allein als veränderlich angenommen wird, (§. 487.) $Q\,dy = 2y\,dy$, wenn z allein veränderlich ist, $R\,dz = 2z\,dz$, und wenn sich x allein verändert, $P\,dx = -2y''\,dy''$.

Die Werthe: $P = -\frac{2y''\,dy''}{dx}$, $Q = 2y$ und $R = 2z$ geben nun (§. 487.)

$$a = x + \frac{Q}{P}y + \frac{R}{P}z = x - \frac{(y^2+z^2)\,dx}{y''\,dy''} = x - \frac{y''\,dx}{dy''};$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{P}{Q} = -\frac{y''\,dy''}{y\,dx};$$

$$\text{tang } \beta = \frac{P}{R} = -\frac{y''\,dy''}{z\,dx}; \text{ ferner ist (§. 490.)}$$

$$x' = x - \frac{P}{R}z = x + \frac{y''dy''}{dx};$$

$$y' = y - \frac{Q}{R}z = y - \frac{y}{z}.z = 0; \text{ und (§. 491.)}$$

$$n = z\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{y''^2\,dy''^2}{dx^2} + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y''^2\,dy''^2}{dx^2} + y''^2} = y''.\frac{\sqrt{dx^2+dy''^2}}{dx};$$

$$\sec \vartheta = \sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}} = \frac{y''}{z}.\frac{\sqrt{dx^2+dy''^2}}{dx}.$$

Die gefundenen Formeln zeigen, daß die Berührungsebene die Umdrehungsachse in demjenigen Puncte K schneide, in welchem die Tangente MK des Punctes M der erzeugenden Linie AM mit dieser Achse zusammen trifft; daß die Normale eines jeden Punctes der Fläche durch die Umdrehungsachse gehe, und daß diese Normale mit der Normale desselben Punctes in der erzeugenden Linie zusammen falle, wenn man annimmt, daß die erzeugende Linie durch die Umdrehung in diejenige Lage gekommen sey, in welcher sie durch den Punct geht, durch den die Berührungsebene zu legen war.

Beyspiel I.

Die beschreibende Linie AB sey eine gerade, zu AX im Abstande h parallele Linie. —

Man hat in diesem Falle $y'' = h$ und $dy'' = o$; folglich wird a unendlich, $\alpha = o$, $\beta = o$, $x' = x$, $y' = o$, $n = h$ und $\sec \vartheta = \frac{h}{z}$.

Die Berührungsebene durch einen Punct der Seitenfläche eines senkrechten Cylinders hat also mit der letztern die Seite gemein, welche durch den Berührungspunct geht, und die Normale ist auf der Achse des Cylinders senkrecht.

Beyspiel II.

Es sey AB eine gerade Linie, welche mit AX einen Winkel $BAX = \eta$ macht. —

In diesem Falle ist $y'' = x \operatorname{tang} \eta$, und $dy'' = dx \operatorname{tang} \eta$;

$$\text{mithin } a = x - \frac{x \operatorname{tang} \eta \, dx}{dx \operatorname{tang} \eta} = o,$$

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{x}{y} \operatorname{tang}^2 \eta, \quad \operatorname{tang} \beta = -\frac{x}{z} \operatorname{tang}^2 \eta,$$

$$x' = x(1 + \operatorname{tang}^2 \eta) = x \sec^2 \eta, \quad y' = o,$$

$$n = x \operatorname{tang} \eta \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \eta} = x \operatorname{tang} \eta \sec \eta, \text{ und}$$

$$\sec \vartheta = \frac{x}{z} \operatorname{tang} \eta \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \eta} = \frac{x}{z} \operatorname{tang} \eta \sec \eta.$$

Wegen $a = o$ hat also auch die Berührungsebene durch einen Punct der Seitenfläche eines senkrechten Kegels, eine Seite mit der Kegelfläche gemein.

Beyspiel III.

Die beschreibende Linie sey eine Ellipse, A ein Scheitel der Achse, um welche sich die Ellipse dreht, a' die Größe dieser Achse, und b' die Größe der andern Achse. —

Dann ist $y'' = \frac{b'}{a'} (a' x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 346.) und

$d y'' = \frac{b'}{a'} (\frac{1}{2} a' - x) d x (a' x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; daher wird

$$a = x - \frac{a' x - x^2}{\frac{1}{2} a' - x} = - \frac{a' x}{a' - 2 x};$$

$$\text{tang } \alpha = - \frac{b'^2 (\frac{1}{2} a' - x)}{a'^2 y}; \quad \text{tang } \beta = - \frac{b'^2 (\frac{1}{2} a' - x)}{a'^2 z};$$

$$x' = x + \frac{b'^2}{a'^2} (\tfrac{1}{2} a' - x) = \frac{b'^2}{2 a'} + \frac{(a'^2 - b'^2)}{a'^2} x; \quad y' = o;$$

$$n = \frac{b'}{a'} (a' x - x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{b'^2}{a'^2} (\tfrac{1}{2} a' - x)^2 (a' x - x^2)^{-1}}$$

$$= \frac{b'}{a'^2} \sqrt{\tfrac{1}{4} a'^2 b'^2 + (a'^2 - b'^2) x (a' - x)}, \text{ und}$$

$$\sec \vartheta = \frac{b'}{a'^2 z} \sqrt{\tfrac{1}{4} a'^2 b'^2 + (a'^2 - b'^2) x (a' - x)}.$$

§. 493.

Fig. 39. M und m seyen zwey Puncte einer krummen Linie B D im Raume; M', m' ihre Projectionen in der Ebene der x und y, und M'', m'' ihre Projectionen in der Ebene der x und z. Diese Projectionen sind Puncte der Projectionen B' D' und B'' D'' der Linie B D, und wenn man durch M' und m' die gerade Linie M' S' und durch M'' und m'' die gerade Linie M'' S'' zieht, so sind diese beyden Linien die Projectionen der geraden Linie M S, welche durch M und m geht (§. 470.).

Die Lage der Linie MS, und mithin auch der Winkel, welchen MS mit einer, in bestimmter Lage gegen BD durch M gezogenen geraden Linie, z. B. mit MM' macht, wird durch die beyden Puncte M und m bestimmt.

Man stelle sich vor, daß m dem Puncte M näher rücke, und dadurch der Bogen Mm abnehme, so ist, wenn dieser Bogen Null wird, die Lage des Schenkels MS unbestimmt; es ist also der Winkel M'MS ein durch den Bogen Mm bestimmter Winkel, welchem kein bestimmter Werth mehr zukömmt, wenn Mm = o ist; daher hat derselbe eine Grenze.

Mit dem Bogen Mm nehmen auf seine Projectionen M'm' und M''m'' bis auf Null ab, und dadurch kommen die Richtungen der Linien M'S', M''S'' den Richtungen M't', M''t'' beliebig nahe, wenn diese letztern geraden Linien die Tangenten der Puncte M' und M'' in B'D' und B''D'' sind (§. 245.).

Ist nun Mt die Linie, wozu M't' und M''t'' als Projectionen gehören, so kann also der Winkel tMS durch die Abnahme des Bogens Mm beliebig klein werden. Daher ist M'Mt die Grenze des Winkels M'MS, und Mt heißt die Tangente des Punctes M der Linie BD.

§. 494.

Da man die Lage einer Linie im Raume durch die Gleichungen zweyer Projectionen derselben angibt (§. 484.), und durch jeden Punct einer Linie von einfacher Krümmung die Tangente gezogen werden kann, wenn eine Gleichung der Linie gegeben ist (§. 257.), so läßt sich immer die Lage der Tangente für jeden beliebigen Punct einer Linie im Raume vermittelst der Projectionen dieser Tangente angeben.

§. 495.

Wenn M'P, M''P die Durchschnitte der Ebene M'MM'' mit den Ebenen XAY und XAZ sind, so sind AP = x, M'P = y und MM' = z die Coordinaten des Punctes M; eben so sind Ap, m'p und mm' die Coordinaten des Punctes m,

wenn die coordinirten Ebenen von der Ebene m'mm'' in m'p und m''p geschnitten werden.

Betrachtet man den Bogen M m als eine Veränderung des Bogens BM = s, zieht M'R' # AX, und legt durch M die Ebene MRR''M'' zur Ebene XAY parallel, so sind die mit dieser Veränderung △s zusammen gehörigen Veränderungen der Coordinaten: Pp = △x, m'R' = △y, und mr = △z.

Wenn man hingegen Pp als das Differentiale der Abscisse annimmt, und t, t', t'' die Durchschnittspuncte der Ebene m'mm'' mit den Tangenten sind, so ist für die Projection M'D', t'R' = dy, und für die Projection M''D'', t''R'' = dz (§. 248.).

§. 496.

Aus dem Dreyecke M'R't' ist M't' = $\sqrt{M'R'^2 + t'R'^2} = \sqrt{Pp^2 + t'R'^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = MR$, und aus dem Dreyecke MRt, Mt = $\sqrt{MR^2 + tR^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; also erhält man für den Neigungswinkel T der Tangente des Punctes M mit der der Ebene der x und y,

$$\text{tang } T = \text{tang } tMR = \frac{tR}{MR} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$ und aus den Proportionen:

$$tR : MR = MM' : TM',$$
$$tR : Mt = MM' : TM,$$

für die Subtangente des Punctes M in der Ebene der x und y,

$$TM' = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und für die Größe der Tangente vom Berührungspuncte bis zum Durchschnitte mit der Ebene der x und y,

$$MT = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

§. 497.

Bey der Schraubenlinie ist $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und $z =$

$\frac{a}{2\pi}$ arc $(\sin = \frac{x}{r})$ (§. 485.); folglich $dy = -x\,dx\,(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

und $dz = \frac{a}{2\pi} dx(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; daher wird (Fig. 36.)

$$\text{tang } T = \frac{a}{2\pi} dx(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{dx^2 + x^2 dx^2 (r^2 - x^2)^{-1}}$$

$$= \frac{a}{2r\pi},$$

$$T\,M' = \frac{\text{arc } (\sin = \frac{x}{r})}{dx(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} \times dx(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot r$$

$$= r.\ \text{arc } (\sin = \frac{x}{r}),\ \text{und}$$

$$TM = \frac{\text{arc } (\sin = \frac{x}{r})}{dx(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{dx^2 + x^2 dx^2 (r^2 - x^2)^{-1} + \frac{a^2}{4\pi^2} dx^2 (r^2 - x^2)^{-1}}$$

$$= \text{arc } (\sin = \frac{x}{r}) \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}.$$

Für die Schraubenlinie ist daher die Neigung der Tangente gegen die Grundfläche des Cylinders unveränderlich; die Subtangente in dieser Ebene ist dem zugehörigen Bogen B M' der Grundfläche gleich, und bey der Abwicklung des Dreyeckes Q R S von der Cylinder-Fläche liegt der abgewickelte Theil Q m der Hypotenuse in der Richtung der Tangente des Punctes M, wenn m' Q in der Richtung M' T ausgespannt wird.

IV. Abſchnitt.

Von der Rectification der Linien im Raume.

§. 498.

Fig. 39. Aus dem Dreyecke MRt (§. 496.) iſt

$$Mt = \frac{MR}{\cos tMR'} \text{ und } MR = M't' = \frac{M'R'}{\cos t'M'R'}, \text{ folglich}$$

$$Mt = \frac{M'R'}{\cos tMR.\cos t'M'R'} = \frac{Pp}{\cos tMR.\cos t'M'R'}.$$

Da nun die Winkel tMR und t'M'R' von Pp unabhängig ſind, ſo iſt Mt eine Größe, welche der Größe Pp proportional iſt.

Ferner kann durch die Abnahme von Pp der Winkel tMS beliebig klein werden (§. 493.), und aus dieſem Grunde ſich das Verhältniß Mt : arc Mm dem Verhältniſſe der Gleichheit beliebig nähern; daher iſt $Mt = d.\ arc\ Mm$ (§. 122.) $= ds$ (§. 495.).

Wenn man alſo die Veränderung Pp der Abſciſſe AP als das Differentiale derſelben annimmt, ſo iſt das Stück Mt der Tangente das Differentiale des Bogens BM.

§. 499.

In §. 496. wurde $Mt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gefunden; mithin iſt für die Linien im Raume,

$$s = \int (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

§. 500.

Für die Schraubenlinie iſt nach §. 497.

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}, \text{ folglich}$$

$$s = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot \int dx\,(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)$$ (§. 295. II. 3.),

wobey Const $= o$ ist, wenn der Bogen in B (Fig. 36.) anfängt. Es ist also durchgehends $BM = Qm$ (§. 485.).

V. Abschnitt.

Von der Quadratur der krummen Flächen.

---

§. 501.

Fig. 40. Eine krumme Fläche schneide die coordinirten Ebenen in HD, GB′ und GH; im Abstande AP sey die Ebene BPD, und im Abstande $Ap = AP + Pp = AP + k$ die Ebene B′pF′ zur Ebene YAZ parallel.

Wenn diese beyden Ebenen von der krummen Fläche in BD und B′F geschnitten werden, so ist zwischen BD und B′F eine Zone der krummen Fläche enthalten, welche auf Einer Seite von dem Durchschnitte BB′ dieser Fläche mit der Ebene der x und z begrenzt ist.

Man begrenze diese Zone auf der andern Seite dadurch, daß man durch irgend einen Punct M der Linie BD eine Ebene MM′R′R zur Ebene der x und z parallel legt, und man lege noch eine Ebene EE′F′F zur Ebene der x und z in einer Entfernung parallel, welche größer ist, als die Entfernung M′P der vorhergehenden.

Zwischen diesen vier Ebenen ist ein prismatischer Raum enthalten, von welchem das Rechteck M′R′F′E′ ein senkrechter Durchschnitt ist.

§. 502.

Durch jeden Punct der Linie BD kann man eine Ebene legen, die zu XAZ parallel ist, und durch den Punct eine Tan-

gente für die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der krummen Fläche ziehen.

Die Fläche, in welcher alle auf diese Art gezogenen Tangenten liegen, und welche mit der krummen Fläche BGHD die Linie BD gemein hat, schneide die Ebene B′pF′ in bf, die Ebenen MR′ und EF′ aber in Mr und Ef; so sind Mr und Ef gerade Linien, und Tangenten der Durchschnitte MR und EF in den Puncten M und E.

§. 503.

Aus der Construction folgt, daß $AP = x$, $M'P = y$ und $MM' = z$ die Coordinaten des Punctes M seyen, und es ist die Fläche Mf (zwischen den geraden Linien Mr, Ef, und den krummen ME und rf) $= \triangle BMrb$, wenn man $M'E' = \triangle y$ setzt; denn BMrb nimmt um Mf zu, wenn bey unverändertem Werthe von AP und Pp, M′P um M′E′ wächst.

§. 504.

Es sey durch M eine Berührungsebene der krummen Fläche BGHD gelegt; so liegt Mr in dieser Ebene, und ihr Durchschnitt Me mit der Ebene BPD ist die Tangente des Punctes M der Linie BD (§. 488.).

Da man die Größe des schiefen Durchschnittes eines Prisma erhält, wenn man die Größe des senkrechten mit dem Cosinus des Neigungswinkels beyder Durchschnittsebenen dividirt, oder was einerley ist, mit der Secante dieses Winkels multiplicirt, so ist der Durchschnitt der Berührungsebene mit dem Prisma

$$MF', = M'R'.M'E'.\sec\vartheta\,(\S.491.) = k\triangle y.\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}}.$$

Dieser Durchschnitt ist demnach, weil k oder M′R′ und ϑ von $\triangle y$ unabhängig sind, mit der Veränderung $\triangle y$ im geraden Verhältnisse.

Ferner kann durch die Abnahme von $\triangle y$ der Winkel eME (der Tangente Me mit der Sehne ME) beliebig klein werden, und dadurch das Verhältniß dieses Durchschnittes zur Fläche

MEfr oder △BMrb dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen; daher ist dieser Durchschnitt das Differentiale von BMrb, wenn M'E' als Differentiale von M'P angenommen wird (§. 122.).

Bezeichnet U die Größe der Fläche BMrb, so ist also $dU = k\,dy.\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}}$, woraus U gefunden wird, wenn man aus der Gleichung der krummen Fläche für z substituirt, und dann so integrirt, daß in dieser Differential-Größe, x und k als beständige Größen betrachtet werden.

Der beständige Theil des Integrales muß so bestimmt werden, daß dasselbe für $y = o$ selbst Null wird, wenn man die Größe U von B b angefangen finden will.

§. 505.

Weil in der Differential-Größe: $dU = k\,dy.\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}}$ der veränderliche Factor $\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}}$ die Größe k nicht enthält, so ist das Integrale oder U ein Product aus dem Factor k mit einem von k unabhängigen Factor (§. 189.); U steht also mit k im geraden Verhältnisse, wenn man nun k allein als veränderlich betrachtet.

Die Sehnen EF, MR, BB'... aller Durchschnitte der krummen Fläche BGHD mit Ebenen, die zu XAZ parallel sind, machen mit den zugehörigen Tangenten Ef, Mr, Bb..., Winkel, welche durch die Abnahme von Pp oder k beliebig klein werden können, folglich kann das Verhältniß der Fläche U zum Theile der krummen Fläche, welcher von den Bögen BM, MR, RB' und B'B begrenzt wird, dem Verhältnisse der Gleichheit bey der Abnahme von k beliebig nahe kommen.

Aus diesen Gründen ist U das Differentiale eines solchen Theiles der Fläche BGHD, welcher sich um BMRB' verändert, wenn AP oder x um k zunimmt; oder es ist $U = dV$,

wenn man den genannten Theil der Fläche BGHD mit W bezeichnet, und $k = dx$ setzt (§. 122.).

Man hat daher zur Berechnung von W die Formeln:

$dU = k\,dy \cdot \sqrt{\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{R^2}}$, oder, wenn man sogleich dx statt k schreibt,

$$dU = (dx \cdot \sqrt{\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{R^2}})\,dy, \text{ folglich}$$

$$U = dx(\int . dy \sqrt{\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{R^2}} + C); \text{ und daher}$$

$$W = \int U + C' = \int [dx(\int . dy \sqrt{\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{R^2}} + C)] + C',$$

wobey P, Q und R aus der Gleichung der krummen Fläche nach §. 487. gefunden werden müssen.

Ferner muß man bey der Bestimmung des ersten Integrales, für z aus der Gleichung der krummen Fläche substituiren, und x als beständig annehmen (§. 504.).

Welcher Werth für y in dem für U gefundenen Werthe zu setzen ist, hängt von der jedesmaligen Größe des Bogens BM im zu berechnenden Theile W der krummen Fläche ab.

§. 506.

Um in einem Beyspiele zu zeigen, wie man die so eben gegebenen Regeln in Anwendung zu bringen, und bey der Bestimmung der beständigen Theile C und C' der Integralen zu verfahren habe, sey (Fig. 41.) der Anfangspunct A der Coordinaten zugleich der Mittelpunct der Seitenfläche eines senkrechten Kegels, die Achse des Kegels in der Richtung AX, der Winkel einer jeden Seite mit der Achse $= \nu$; und es sey derjenige Theil der Kegelfläche zu berechnen, welcher in der Ecke AXYZ von zwey Ebenen begrenzt wird, die zu den Ebenen XAZ und YAZ in den Entfernungen a und b parallel sind. —

Durch den beliebigen Punct M der Kegelfläche sey die Ebene BDP # YAZ gelegt, MM' auf dem Durchschnitte DP senk-

recht, die Seite A M und die gerade Linie M P gezogen; so ist für den Punct M,
$AP = x$, $M'P = y$, $MM' = z$, und $MAP = \eta$.

Also ist $MP = x \text{ tang. } \eta$, und $M'P^2 + MM'^2 = MP^2$; nämlich $y^2 + z^2 = x^2 \text{ tang.}^2 \eta$, oder $y^2 + z^2 - x^2 \text{ tang.}^2 \eta = 0$ ist die Gleichung dieser Kegelfläche.

Man findet aus dieser Gleichung (§. 487.),
$P = -2x \text{ tang.}^2 \eta$, $Q = 2y$ und $R = 2z$; daher ist

$$\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2\text{tang}^4\eta + y^2 + z^2}\,\frac{\sqrt{x^2\text{tang}^4\eta + x^2\text{tang}^2\eta}}{\sqrt{x^2\text{tang.}^2\eta - y^2}}$$

$= x \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta (x^2 \text{ tang.}^2 \eta - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, wenn man aus der Gleichung der Kegelfläche für z substituirt; und mithin

$$U = dx\left[\int x \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta \, dy (x^2 \text{ tang.}^2 \eta - y^2)^{-\frac{1}{2}} + C\right]$$

$$= dx\left[x \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta \text{ arc.} \left(\sin. = \frac{y}{x \text{ tang. } \eta}\right) + C\right],$$

wenn man nach der Formel II. 3. (§. 295.) integrirt.
C ist im gegenwärtigen Falle $= o$, weil für $y = o$ auch $U = o$ seyn muß.

Die zu X A Z parallele Ebene schneide die Ebene X A Y in G H, die Kegelfläche in G E, und durch G sey die Ebene G I K parallel zu Y A Z gelegt; dann ist, wenn man M zwischen A und G K annimmt, mithin für den Theil A G K der Kegelfläche die Größe des Bogens B M bis an den Durchschnitt A G zu nehmen, und daher in U für y derjenige Werth zu setzen, welcher mit $z = o$ zusammen gehört.

Dieser ist aus der Gleichung der Kegelfläche, $= x \text{ tang. } \eta$; mithin
$U = x\,dx \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta \text{ arc.} (\sin. = 1)$
$= \frac{1}{2}\pi x\,dx \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta = dW$, und daher
$W = \frac{1}{4}\pi x^2 \text{ tang. } \eta \text{ sec. } \eta + C'$; es ist aber auch $C' = o$, weil W mit x Null wird.

Der Abstand a der Ebene E G H von X A Z ist $= GI = AI \text{ tang. } \eta$, mithin $AI = a \cot. \eta$.

Um die Größe der Fläche A G K zu bekommen, muß man demnach $x = a \cot. \eta$ setzen; daher wird

$$A G K A = \frac{1}{4} a^2 \pi \cot. \eta \sec. \eta = \frac{1}{4} a^2 \pi \operatorname{cosec}. \eta.$$

Wenn $b > a \cot. \eta$ ist, so ist A G K A nur ein Theil der gesuchten Fläche, und es muß noch der andere berechnet werden, welcher zwischen G K und der Ebene liegt, die zu Y A Z im Abstande b parallel ist.

Auch für diesen Theil ist

$$U = x\,dx \tang. \eta \sec. \eta . \arc. \left(\sin. = \frac{y}{x \tang. \eta}\right),$$ mit dem

Unterschiede, daß $y = a$ gesetzt werden muß, weil die Größe des Bogens B M nur bis an G E zu nehmen, und für jeden Punct von G E, $y = a$ ist.

Man erhält demnach

$$W' = \tang. \eta \sec. \eta \int x\,dx . \arc. \left(\sin. = \frac{a}{x \tang. \eta}\right) + C''$$

$$= \frac{1}{2} \tang. \eta \sec. \eta \left[x^2 \arc. \left(\sin. = \frac{a}{x \tang. \eta}\right)\right.$$

$$\left. + a \cot.^2 \eta \sqrt{x^2 \tang.^2 \eta - a^2}\right] + C'',$$

wenn man nach §. 296. integrirt.

Da dieser Theil der Fläche $= o$ seyn muß, wenn $x = A I = a \cot. \eta$ ist, so bekömmt man zur Bestimmung der beständigen Größe C'' die Gleichung:

$o = \frac{1}{2} \tang. \eta \sec. \eta . a^2 \cot.^2 \eta . \frac{1}{2} \pi + C''$, und dann durch Substitution,

$$W' = \frac{1}{2} \tang. \eta \sec. \eta \left[x^2 \arc. \left(\sin. = \frac{a}{x \tang. \eta}\right)\right.$$

$$\left. + a \cot.^2 \eta \left(\sqrt{x^2 \tang.^2 \eta - a^2} - \frac{1}{2} a \pi\right)\right].$$

Die Summe von W' (wenn man $x = b$ setzt,) und von A G K A gibt die gesuchte Fläche.

Wäre $b = a \cot. \eta$, so wäre A G K A allein diese Fläche; wenn aber $b < a \cot. \eta$ wäre, so erhielte man für ihre Größe den Ausdruck: $\frac{1}{4} b^2 \pi \tang. \eta \sec. \eta$ aus der Formel:

$$VV = \frac{1}{4} x^2 \pi \tang. \eta \sec. \eta.$$

§. 507.

Fig. 38. Für die Oberfläche des durch die Umdrehung einer Linie AB um AX entstandenen Sphäroides ist nach der §. 492. angenommenen Bezeichnung,

$$\sqrt{\frac{P^2+Q^2+R^2}{R^2}} = \frac{y''}{z}\cdot\frac{\sqrt{dx^2+dy''^2}}{dx} = \frac{y''\sqrt{dx^2+dy''^2}}{dx\sqrt{y''^2-y^2}}, \text{ also}$$

$$U = dx\left[\int . dy \frac{y''}{dx}(dx^2+dy''^2)^{\frac{1}{2}}(y''^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}+C\right]$$

$$= dx\left[\frac{y''}{dx}(dx^2+dy''^2)^{\frac{1}{2}}\int dy\,(y''^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}+C\right]$$

$$= dx\left[\frac{y''}{dx}(dx^2+dy'')^{\frac{1}{2}}\,\text{arc.}\left(\sin. = \frac{y}{y''}\right)+C\right],$$

wenn man vermittelst der Formel II. 3. (§. 295.) integrirt, weil x als beständig betrachtet werden muß (§. 504.), und dann auch y'' beständig ist (§. 492.).

Um denjenigen Theil der Oberfläche des Sphäroides zu finden, welcher in der Ecke AXYZ von der Umdrehungsebene des Punctes M begrenzt wird, muß der Bogen BM in dieser Ebene von seinem Durchschnitte B mit der Ebene XAZ bis zum Durchschnitte mit der Ebene XAY genommen werden; also muß U = o seyn, wenn y = o ist, (wodurch C = o wird,), und dann ist y = y'' zu setzen. Man hat also

$$U = y''(dx^2+dy''^2)^{\frac{1}{2}} \times \tfrac{1}{2}\pi.$$

Bezeichnet man die Oberfläche des Sphäroides rings um AX genommen, mit W, so ist der Theil derselben, welcher in der Ecke AXYZ zwischen den coordinirten Ebenen XAY und XAZ liegt, = $\frac{1}{4}$ W, weil die Oberfläche von diesen beyden unbegrenzten Ebenen in vier congruente Theile getheilet wird; also ist U = $\frac{1}{4}$ dW, und

$$dW = 4U = 2\pi y''(dx^2+dy''^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ mithin}$$

$$W = 2\pi\int y''(dx^2+dy''^2)^{\frac{1}{2}} + \text{Const.}, \text{ wie §. 280.}$$

VI. Abschnitt.

Von der Cubatur der Körper, welche von krummen Flächen begrenzt sind.

§. 508.

Fig. 42. Eine cylindrische Fläche, deren Seiten zu AX parallel sind, schneide die Ebene YAZ in GH; AP = x, M'P = y und MM' = z seyen die Coordinaten eines beliebigen Punctes M dieser Fläche. Die Ebene durch MM' und M'P schneide die cylindrische Fläche in BD, und diese werde von der durch M zu XAZ parallelen Ebene ME' in ME geschnitten; dann ist ME eine gerade zu AX parallele Linie.

Durch die beyden Ebenen MM'P, ME', durch die coordinirten Ebenen, und durch die cylindrische Fläche wird ein Körper AM begrenzt, welcher um den, zwischen den parallelen Durchschnitten E'M und e'm liegenden Theil e'M zunimmt, wenn M'P um m'M' wächst, und dadurch die Ebene E'M in die Lage e'm kömmt.

Bezeichnet man den Raum AM mit Q, so ist also der Theil zwischen E'M und e'm = △Q, bey unverändertem Werthe von AP oder x mit M'm' = △y zusammen gehörend.

Wenn man durch M und m Ebenen legt, die zu XAY parallel sind, so liegen ME und me in diesen Ebenen, und man erhält zwey rechtwinklige Parallelepipeden von der gemeinschaftlichen Grundfläche e'm'M'E', deren Höhen = MM', und = mm' sind.

Das Verhältniß dieser Parallelepipeden ist demnach dem Verhältnisse MM' : mm' gleich, und kann daher durch die Abnahme von m'M' dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen.

Da nun $\triangle Q$ immer zwischen diesen Parallelepipeden enthalten ist, so kann sich also auch das Verhältniß des einen Parallelepipedums, welches MM' zur Höhe hat, zu $\triangle Q$, dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nähern. Ferner steht dieses Parallelepipedum mit $M'm'$ gerade in Proportion, weil $E'M'ME$ während der Veränderung von $M'm'$ unverändert bleibt; mithin ist dasselbe das Differentiale von Q, wenn man $M'm'$ als Differentiale von $M'P$ annimmt (§. 122.).

Man hat daher $dQ = E'M' . MM' . M'm' = xzdy$, und daraus $Q = x(\int z dy + C)$ (weil x als unveränderlich angenommen werden muß), $= AP . GEE'A$, da die Größe dieser Fläche $= BMM'P = \int z dy + C$ ist (§. 277.).

Heißt man $GEE'A$ die Grundfläche, und AP die Höhe des Körpers Q, so ist also dessen Inhalt dem Producte aus der Grundfläche mit der Höhe gleich. Aus diesem Grunde pflegt man Körper wie AM, prismatische zu nennen.

§. 509.

Fig. 40. Ein Körper K sey durch eine krumme Fläche, durch die coordinirten Ebenen, durch die Ebene BDP, welche zu YAZ parallel ist (§. 501.), und durch eine Fläche begrenzt, die durch MM' geht.

Nimmt AP um Pp zu, so wächst der Körper um den Raum, welcher zwischen den Flächen $BMM'P$ und $B'RR'p$ enthalten ist. Letzterer ist also $= \triangle K$, und mit $Pp = \triangle x$ zusammen gehörig.

Offenbar ist $\triangle K$ größer als der eine, und kleiner als der andere von zwey prismatischen Körpern, welche bey der gemeinschaftlichen Höhe Pp die Flächen $BMM'P$ und $B'RR'p$ zu Grundflächen haben.

Das Verhältniß dieser prismatischen Körper ist wegen der gemeinschaftlichen Höhe dem Verhältnisse ihrer Grundflächen gleich (§. 508.), und letzteres kann durch die Abnahme von Pp dem Verhältnisse der Gleichheit beliebig nahe kommen; folglich hat dieses auch bey dem Verhältnisse der Körper, und bey dem Verhält-

nisse des prismatischen Körpers, dessen Grundfläche B MM' P ist, zu △ K Statt.

Ueber dieß ist die Größe dieses prismatischen Körpers seiner Höhe P p proportional, weil bey der Veränderung von P p seine Grundfläche unverändert bleibt; also ist sein Inhalt $= dK$, wenn man $Pp = dx$ setzt, nämlich P p als das Differentiale von AP betrachtet (§. 122.).

Man hat daher

$dK = dx \,.\, BMM'P = dx\,(\int z\,dy + C)$ (§. 508.), und

$K = \int [dx\,(\int z\,dy + C)] + C'$.

Die Bestimmung der Größen C und C' geschieht auf ähnliche Weise, wie bey der Berechnung der krummen Flächen.

Man muß also, um K zu finden, anfänglich für z aus der begrenzenden krummen Fläche substituiren, und dann $z\,dy$ so integriren, daß x als beständig angenommen wird.

Dann ist C zu bestimmen, und hierauf für y derjenige Werth zu setzen, welcher der jedesmaligen Größe des Bogens B M entspricht.

Endlich hat man das bisher Gefundene, welches nur noch eine Function von x seyn kann, mit dx zu multipliciren, das Product neuerdings zu integriren, und aus den Umständen der Aufgabe, C' zu bestimmen.

Anmerkung.

Die für K gefundene Formel wird gewöhnlich so ausgedrückt:

$K = \int\int\int (dx\,dy\,dz)$, welches so viel bezeichnet, als

$K = \int [dx \int (dy \int dz)]$.

Es ist aber $\int dz = z$, also nach der angeführten Bezeichnung, $K = \int (dx \int z\,dy)$, welcher Ausdruck sich von dem zuvor gefundenen nur darin unterscheidet, daß die nach jeder Integrirung hinzu zu fügenden beständigen Größen in demselben nicht angezeigt sind.

§. 510.

Fig. 35. Aus der Gleichung der krummen Fläche,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (§. 483.) ist

$z = c\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, also für die Berechnung des von dieser Fläche begrenzten Körpers,

$$\int z\,dy + C = c\int dy\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$c\left[\tfrac{1}{2}y\left(\frac{a^2-x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b(a^2-x^2)}{2a^2}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right] + C.$$

(§. 295. II, 3. und A.).

Berechnet man zuerst bloß den Theil ABCD dieses Körpers, so ist der prismatische Körper, dessen Inhalt $dx\int z\,dy$ ist (§. 508.), Null, wenn $y = o$ gesetzt wird; woraus $C = o$ folgt.

Da der Bogen BM (Fig. 40.) für den Theil BCD (Fig. 35.) der krummen Fläche bey jedem Werthe von x bis an die Ebene XAY reicht, also für dessen Endpunct, $z = o$ ist; so muß im gefundenen Integrale, $y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt werden, weil dieser Werth von y mit $z = o$ in der Gleichung der Fläche zusammen gehört.

Es wird aber bey diesem Werthe von y,

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = o, \text{ und } \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right) =$$

$\operatorname{arc}(\sin = 1) = \frac{1}{2}\pi$; also

$$\int z\,dy + C = \frac{bc\pi}{4a^2}(a^2 - x^2), \text{ und}$$

$$K = \frac{bc\pi}{4a^2}\int (a^2 - x^2)\,dx + C'$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3) + C.'$$

Der berechnete Theil des Raumes ist Null, wenn man $x = o$ setzt, daher ist auch $C' = o$, und mithin für $x = a$,

$$K \text{ oder } ABCD = \frac{bc\pi}{4a^2} \times \tfrac{2}{3}a^3 = \tfrac{1}{6}abc\pi.$$

Der ganze von der krummen Fläche eingeschlossene Körper wird von den unbegrenzten coordinirten Ebenen in acht congruente Theile getheilet, also ist derselbe

$$= 8\,ABCD = \tfrac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi = \tfrac{1}{6}\cdot 2a\cdot 2b\cdot 2c\cdot\pi = \tfrac{1}{6}\,BB'\cdot CC'\cdot DD'\cdot\pi.$$

§. 511.

Fig. 38. Für den in der Ecke AXYZ liegenden Theil des Sphäroides, welches durch die Umdrehung einer Fläche ABP um AX entsteht, ist $z = \sqrt{y''^2 - y^2}$ (§. 492.), also

$$\int z\,dy + C = \int dy\,(y''^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$= \tfrac{1}{2}\,y\,(y''^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,y''^2\,\text{arc.}\left(\sin. = \frac{y}{y''}\right) + C$$

Da aber wie im vorhergehenden Beyspiele, $\int z\,dy + C = o$ seyn muß, wenn $y = o$ ist, so ist $C = o$, und dann für $y = y''$, $\int z\,dy + C = \tfrac{1}{2}\,y''^2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}\pi\,y''^2$; folglich

$$K = \tfrac{1}{4}\int y''^2\,dx + C'.$$

Daraus ist die Größe des von der Ebene BPM' begrenzten Theiles des Sphäroides, rings um AX genommen, $= \pi\int y''^2\,dx$ + Const, wie §. 281.

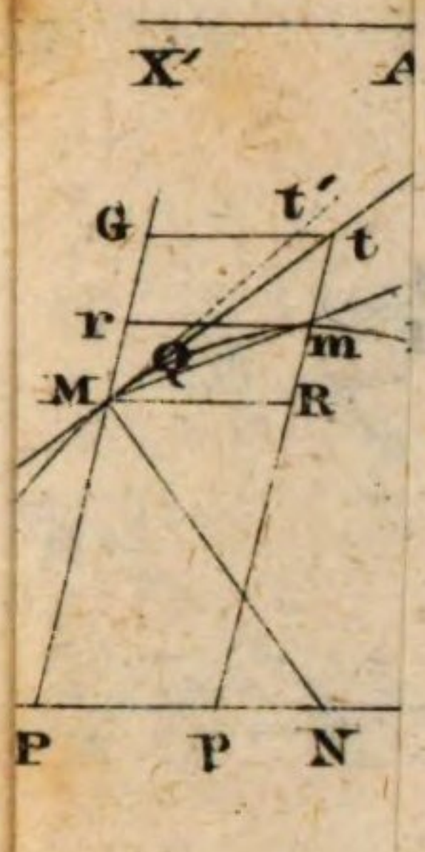
Verzeichniß

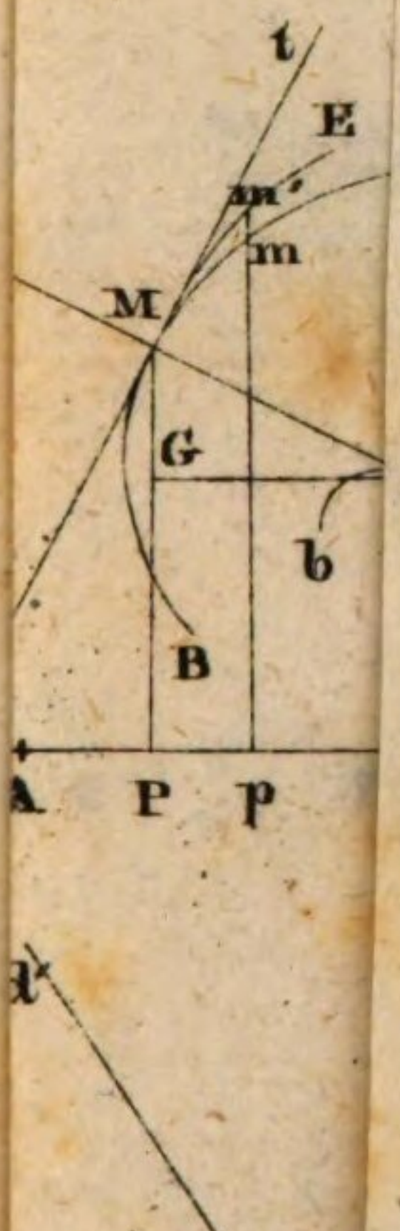
der Druckfehler, welche größtentheils durch die Entfernung des Druckortes veranlaßt wurden.

Seite II Zeile 5 lies: ebene
S. IV Z. 17 statt: mit gründlich lies: gründlich
= 21 = 8 von unten, st. $3x^2$ l. $3x^3$
= 47 = 7 st. 3755 l. 3753
= 50 = 6 v. u. l. 1680 — 1680
= 53 = 12 v. u. st. 504 l. 104.
= 55 = 3 st. $-3900x$ l. $+3900x$
= 63 = 4 v. u. l. — 1,896
= 69 = 1 st. $+25\alpha^2$ m l. $+5\alpha^2$ m $-15\alpha^2$
= 77 = 13 st. $\frac{a}{x}$ l. $\frac{a}{2x}$
= 93 = 11 l. $A - B = -5$
= 96 = 1 v. u. l. $\frac{c'N}{a'}x^{\alpha+(n+1)\delta}$
= 98 = 4 = = st. $A^{\frac{1}{2}}$ l. $Ay^{\frac{1}{2}}$
= 114 = 3 = = st. a^2-x^3 l. a^3-x^3
= 116 = 11 st. $b\log x$ l. $b^{\log x}$
= 117 = 6 v. u. l. $-2xdx$
= 135 = 11 st. $(b-1^2)$ l. $(b-1)^2$
= 146 = 5 v. u. l. $+b\sqrt[3]{a^2b}]:\sqrt[3]{ab^2}$.
= 147 = 12 l. $=0$
= 164 = 2 st. $x^{-2}=dx$ l. $x^{-2}dx$
= 166 = 8 st. $z^2\pm\alpha$ l. $z^2\mp\alpha$
= — = 2 v. u. l. $\int v^{\frac{n}{2}-1}dv$
$(\beta v^n\pm\alpha)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{n\sqrt{\beta}}$
$L(\sqrt{\beta v^n}+\sqrt{\beta v^n\pm\alpha})$;

S. 171 Z. 5 st. βx^n l. βx^n
= 178 = 11 v. u. st. $a+x^2$ l. a^2+x^2
= 179 = 6 = = st. $-^2L$ l. $-\frac{2}{5}L$
= 181 = 3 = = st. γx l. γx^{2n}
= 184 = 14 st. β l. β
= — = 9 v. u. st. $x^{-1})$ l. $x)^{-1}$
= — = 1 = = st. x^2dx l. $x^{-2}dx$
= 185 = 1 = = st. $\alpha\beta+x$ l. $\alpha+\beta x$
= 186 = 15 l. *§. 213.
= 194 = 8 v. u. st. fallen l. liegen
= 201 = 2 = = st. sin A'SP l. sin A'SP'
= 224 = 10 = = st. $\frac{ydy}{dg}$ l. $\frac{ydy}{dx}$
= 227 = 10 = = st. 2. 5. l. 3. 5
= 247 = 8 = = l. * Beyspiel.
= 260 = 3 st. 2 f x l. 2 f) x
= 285 = 5 st. eine l. einer
= 293 = 3 st. $\cos\gamma$ l. $\cos^2\gamma$
= 307 = 1 v. u. st. FM : FM l. FM : F'M
= 311 = 11 st. $a+ap$ l. a^2+ap
= 312 = 2 l. $\frac{b^2}{a^2}$
= — = 4 l. $\frac{b^2}{a^2+b^2}$
= 315 = 6 st. $b^4\sin^2\gamma$ l. $a^4\sin^2\gamma$
= 351 = 12 v. u. l. positive ganze
= 356 = 8 = = st. $2rx\,x^2$ l. $2rx-x^2$

Von Seite 166 bis Seite 190 ist öfters ß an die Stelle von β gesetzt.


X'
A
G
t'
t
r
m
M
R
P
p
N


t
E
m'
m
M
G
b
B
A
P
p

3.
X'
A
D

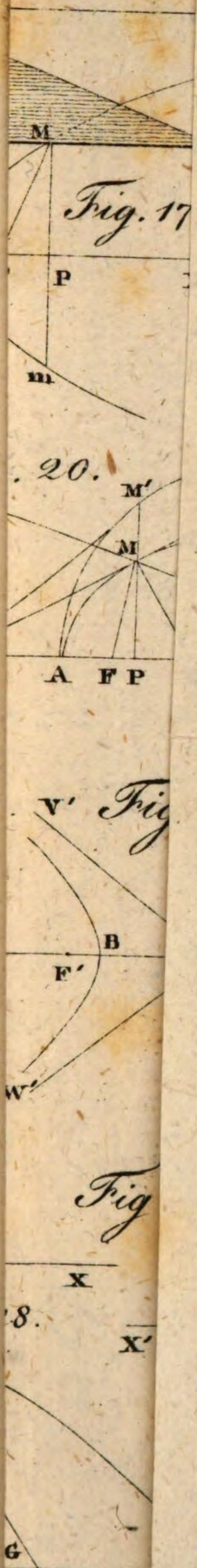


Fig. 17

Fig

Fig

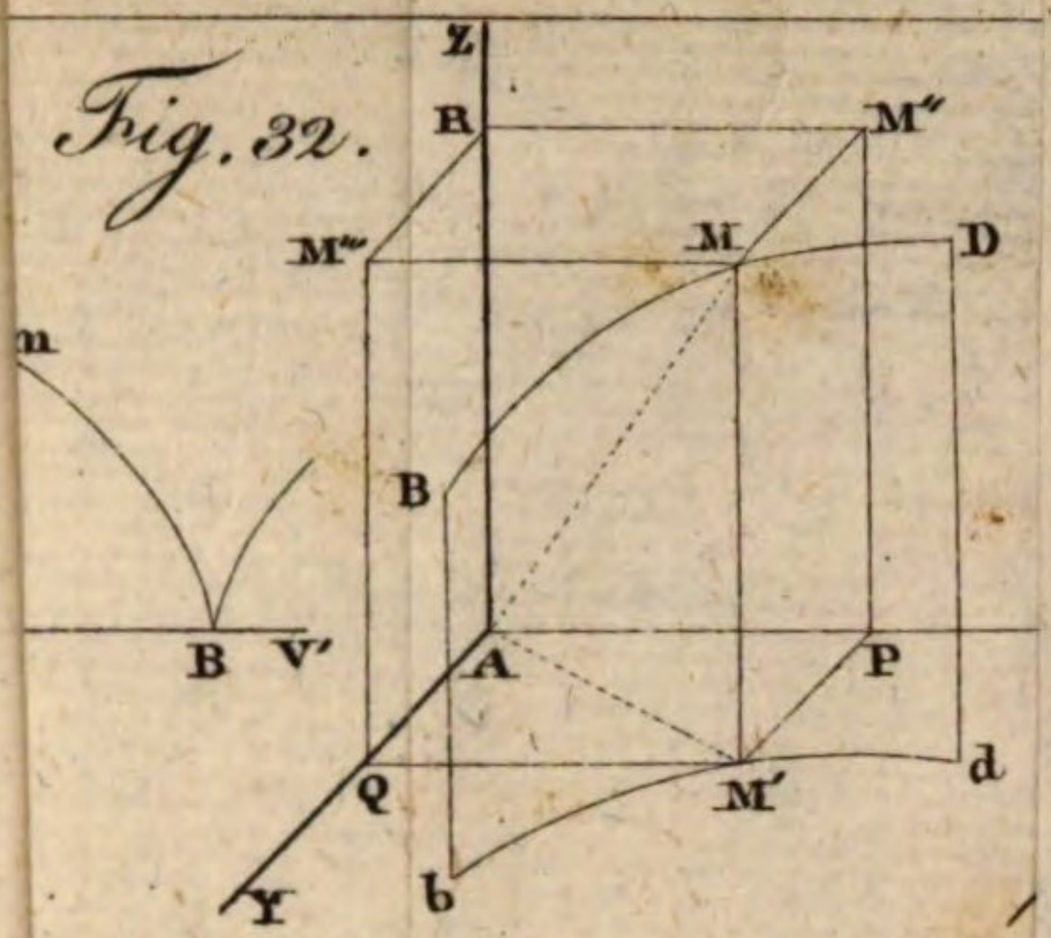


Fig. 32.

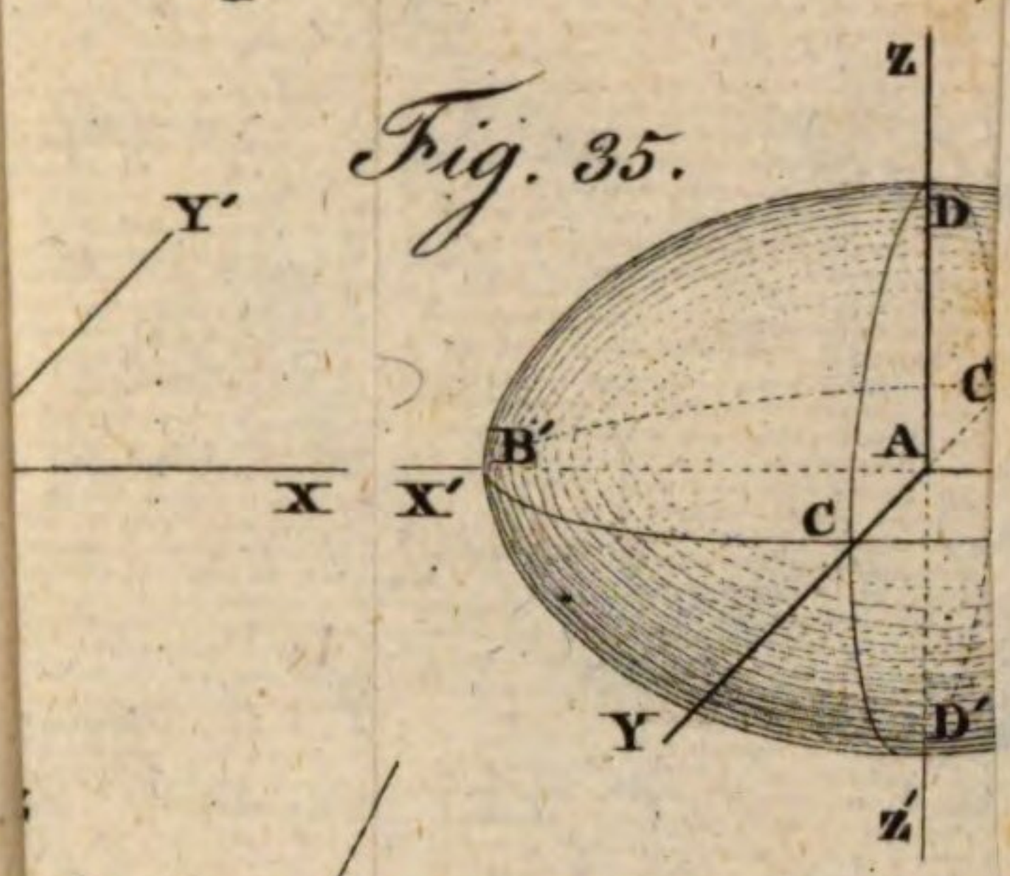
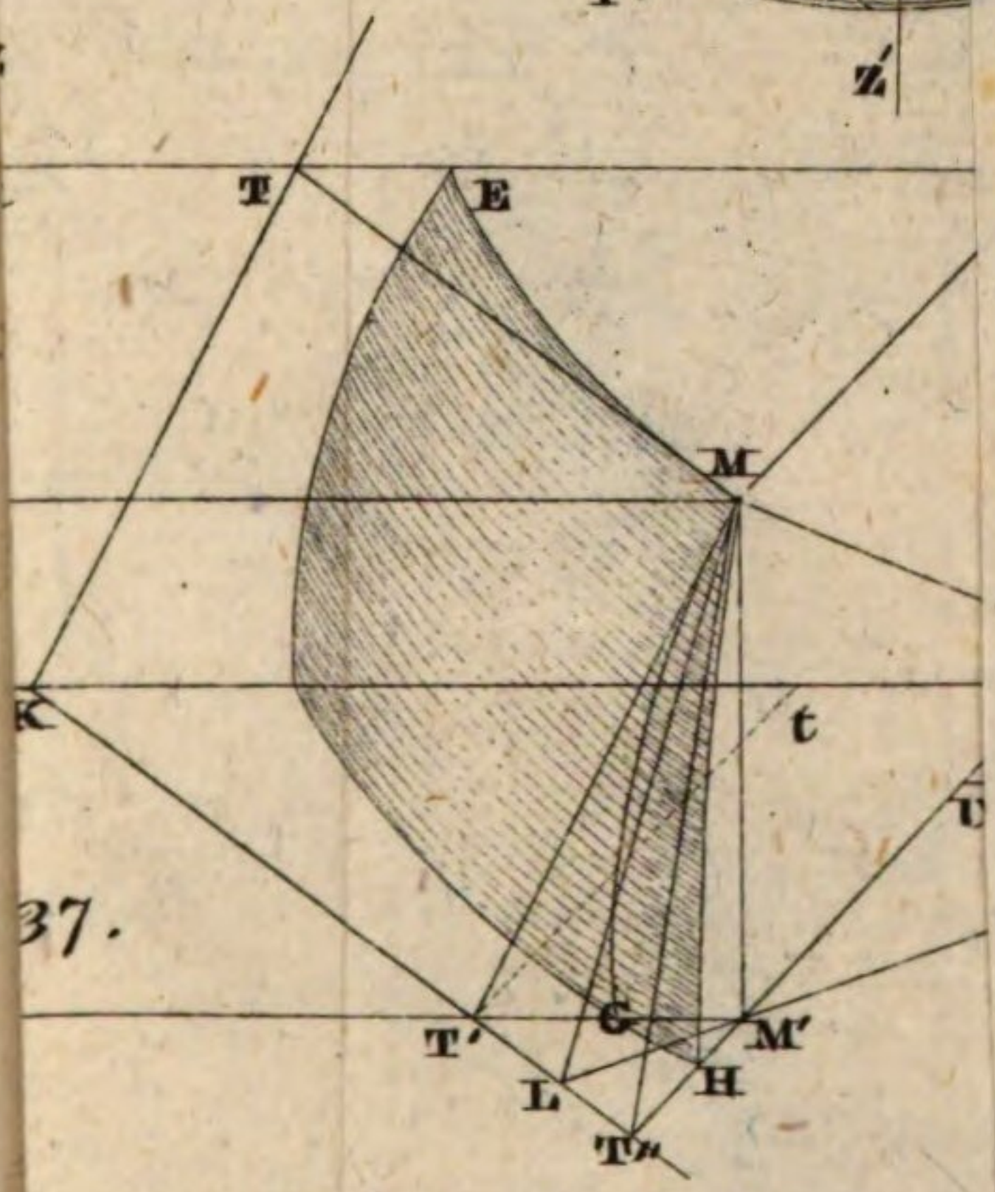


Fig. 35.



37.

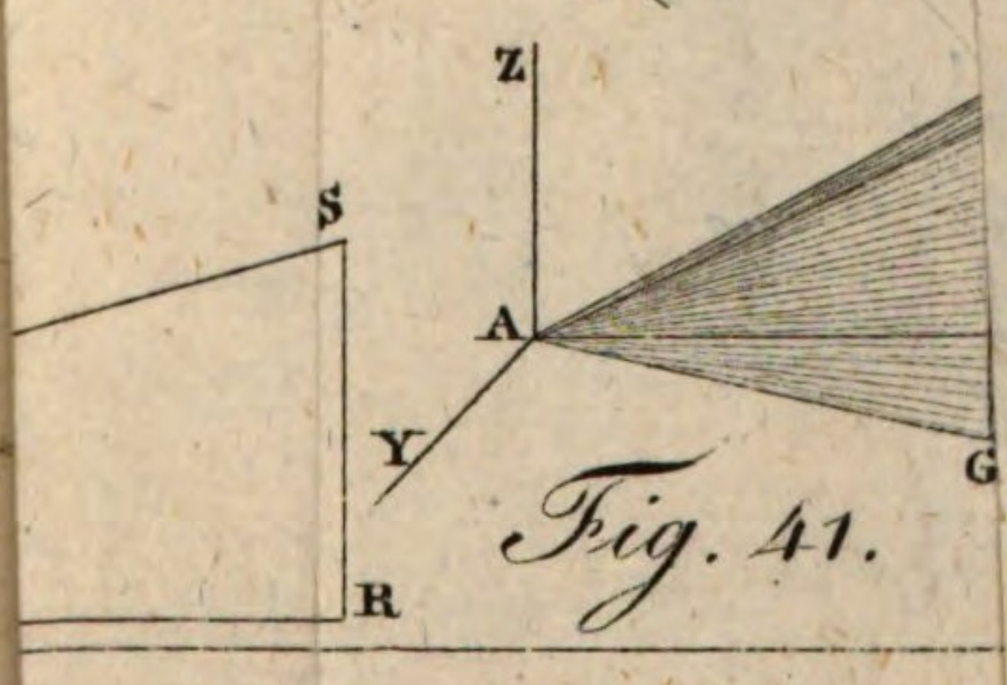


Fig. 41.

D. Knoll

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vestner, Anton

Anfangsgründe der mathematischen Analysis und der höhern Geometrie, vorzüglich zum Gebrauche für den Unterricht in Schulen

München 1823

Math.p. 599 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082988-7